PREUNIVERSITY

MATHEMATICS PART II

ಪ್ರೀಯುನಿವರ್ಸಿಟಿ

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ

ಭಾಗ 2

GEOMETRY AND TRIGONOMETRY

ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ

A BANGALORE UNIVERSITY PUBLICATION

PREUNIVERSITY MATHEMATICS

ಪ್ರೀಯುನಿವರ್ಸಿಟಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ

PART II

GEOMETRY AND TRIGONOMETRY

ಭಾಗ 2

ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ

A BANGALORE UNIVERSITY PUBLICATION

1968

BANGALORE UNIVERSITY PUBLICATION DIVISION

Chief Editor — Dr R. S. Mugali

Publication No. 13

© BANGALORE UNIVERSITY, 1968

MATHEMATICS TEXT BOOK COMMITTEE

Prof. F. J. NORONHA (*Chairman*)
Dr C. N. SRINIVASIENGAR
Sri G. T. NARAYANA RAO
Sri D. V. RAMANNA
Sri K. R. SRIKANTIAH
Sri D. S. CHANDRASEKHARIAH

PRINTED AT THE GOVERNMENT PRESS, BANGALORE

Price : Rs. 4-50

PREFACE

Part II of Preuniversity Mathematics covers the subjects of Geometry and Trigonometry. It is written primarily to meet the requirements of the new syllabus adopted by the Mysore, Karnatak and Bangalore Universities.

Chapter I introduces a new modern approach to the basic concepts of Geometry. A clear distinction is made between undefined terms and definitions. A minimum number of postulates are introduced to serve as a base for the logical development of the subject. The important notion of **betweenness** is explained in a simple manner.

Chapters IV, V and VI provide an elementary introduction to Analytic Geometry including the straight line and circle.

The last four chapters deal with Trigonometry in a simple and compact manner.

Like Part I this book also presents the subject matter simultaneously in English and Kannada. This special feature facilitates a more ready grasp of new mathematical concepts by students with a knowledge of both languages.

I take this opportunity to thank my colleagues on the Committee for their good work and generous cooperation in the preparation of the manuscript.

We are grateful to the Director of the Government Press and his staff for the high standard of printing and the neat appearance of the book. The diagrams were skillfully prepared by Sri K. N. Gopala Rao of the Department of Civil Engineering, University College of Engineering.

F. J. Noronha,
Chairman,
Mathematics Text Book Committee,
Bangalore University

Central College,
Bangalore,
1st August 1968

ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಪ್ರಕಾಶನ ವಿಭಾಗ

ಪ್ರಕಟಣೆಗಳು

ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕಗಳು

1 ಪ್ರೀಯೂನಿವರ್ಸಿಟಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಭಾಗ I, ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸುಲಭ ಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರ ... ... 4·00
ಪ್ರೊ. ಎಫ್. ಜೆ. ನೊರೊನ್ಹಾ ಮತ್ತು ಇತರರಿಂದ

2 ಕಾವ್ಯಲಹರಿ (ಪಿ ಯು ಸಿ) ... ... 2·00
ಡಾ. ರಂ. ಶ್ರೀ. ಮುಗಳಿ ಮತ್ತು ಇತರರಿಂದ ಸಂಪಾದಿತ

3 ಮನಃಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ (I ಬಿ.ಎ.) ... ... 3·50
ಪ್ರೊ. ಎಸ್. ಕೆ. ರಾಮಚಂದ್ರರಾವ್

4 ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ (I ಬಿ.ಎಸ್.ಸಿ.) ... 3·20
ಜಿ ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್

5 ರಾಜ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ (I ಬಿ.ಎ.) .... 3·80
ಹೆಚ್. ಆರ್. ದಾಸೇಗೌಡ ಮತ್ತು ಎಂ. ಎ. ಸಿಂಗಮ್ಮಾಳ್

6 ಸಂಗೀತ ಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರಕಾಶಿಕೆ (I ಬಿ.ಎ.)... .... 3·20
ಟಿ. ಆರ್. ನಾಗರತ್ನ

7 ಸಂಗೀತಶಾಸ್ತ್ರ ಬೋಧಿನಿ (ಪಿ ಯು ಸಿ) .... 2·50
ಜಿ. ಚನ್ನಮ್ಮ

8 ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ (ಪಿ ಯು ಸಿ) ... . 3·20
ಹೆಚ್. ಆರ್. ಸಾಬರೆ

9 ಭೌತ ಶಾಸ್ತ್ರ (ಪಿ ಯು ಸಿ) ....
ಬಿ. ವಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್

10 ಸಾಮಾನ್ಯ ಭೌತ ಶಾಸ್ತ್ರ (I ಬಿ.ಎಸ್.ಸಿ.) ....
ಕೆ. ಶೇಷಾದ್ರಿ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್

11 ವಾಣಿಜ್ಯ ಶಾಸ್ತ್ರ (ಪಿ ಯು ಸಿ) 3.00
ಟಿ. ಹೆಚ್. ನಾರಾಯಣರಾವ್

12 ಭೂಗೋಳ ಶಾಸ್ತ್ರ (ಪಿ ಯು ಸಿ) ... ...
ಎ. ಕುಮಾರಸ್ವಾಮಿ

13 ಪ್ರೀಯುನಿವರ್ಸಿಟಿ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರ ಭಾಗ II 4.50
ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ
ಪ್ರೊ. ಎಫ್. ಜೆ. ನೊರೊನ್ಹಾ ಮತ್ತು ಇತರರಿಂದ

14 ಆರ್ಥಿಕ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ (I ಬಿ.ಎ.)
ಡಾ. ಟಿ. ಎನ್. ವಿಜಯಪ್ಪ ಮತ್ತು ಕೃಷ್ಣನಾಯಕ್

15 ನೀತಿಶಾಸ್ತ್ರ (I ಬಿ.ಎ.)
ಎಸ್. ರಂಗಾಚಾರ್

16 ಗಣಿತ ತರ್ಕ ಶಾಸ್ತ್ರ (II ಬಿ.ಎಸ್.ಸಿ.)
ಪ್ರೊ॥ ಎಫ್. ಜೆ. ನೊರೊನ್ಹಾ ಮತ್ತು ಇತರರಿಂದ

17 ಧ್ವನಿ ಮತ್ತು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ (I ಬಿ.ಎಸ್.ಸಿ.)
ಕೆ. ಶೇಷಾದ್ರಿ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್

18 ಮತ ಧರ್ಮ ತತ್ತ್ವಶಾಸ್ತ್ರ (I ಬಿ.ಎ.)
ಎಂ. ಯಾಮುನಾಚಾರ್ಯ

19 ರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರ (I ಬಿ.ಎಸ್.ಸಿ.)
ಡಾ॥ ಶೆಟ್ಟಿ, ಡಾ॥ ರೆಡ್ಡಿ, ಸೇತುರಾವ್, ಲಕ್ಷ್ಮಣರಾವ್

20 ವಿಶ್ಲೇಷಣ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ (I ಬಿ. ಎಸ್.ಸಿ.)
ಆರ್. ಗುರುರಾಜರಾವ್

ಪಠ್ಯೇತರ ಪುಸ್ತಕ

1 ಕುದುರೆ ಮುಖದೆಡೆಗೆ ... ... 3·00
(ಪ್ರವಾಸ ಚಿತ್ರ) ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್

Trade enquiries :

The Bangalore University Consumers' Cooperative Society Ltd., Palace Road, Bangalore - 9

CONTENTS—ವಿಷಯಸೂಚಿ

GEOMETRY—ರೇಖಾಗಣಿತ

1 Basic concepts in Geometry 2
ರೇಖಾಗಣಿತದ ಮೂಲ ಭಾವನೆಗಳು

2 Ratio and Proportion 15
ಪ್ರಮಾಣ ಮತ್ತು ಅನುಪ ತ

3 Similar triangles 27
ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು

4 Preliminary Concepts of Analytic Geometry 46
ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತದ ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ಭಾವನೆಗಳು

5 The Straight line 69
ಸರಳ ರೇಖೆ

6 The Circle 114
ವೃತ್ತ

TRIGONOMETRY—ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ

7 Trigonometry 138
ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ

8 Rightangled triangle 167
ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣ

9	Compound angles ಸಂಯುಕ್ತ ಕೋನಗಳು	....	....	185
10	Simple Equations ಸುಲಭ ಸಮೀಕರಣಗಳು	....	....	197
	Answers	....	....	214
	Index ಅನುಬಂಧ	....	....	228

GEOMETRY

ರೇಖಾಗಣಿತ

CHAPTER 1

Basic Concepts in Geometry

1.1 Point, line, plane and space—

All branches of Mathematics including geometry have been built up on certain basic concepts some of which are definable in terms of other concepts, but some of which cannot be defined at all. For example, there have been attempts to define a point as that which has no dimension and a line as that which has only one dimension. It is easily seen that the above statements are not precise. Similar is the case for the plane. The word "dimension" requires definition. So we take *point*, *line* and *plane* as undefined terms. Every line is a set of points and every plane is a set of points.

Space may be explained as the set of all points or elements.

However a line may be denoted as follows :

Fig. 1.1 (a)

It extends bothways infinitely. It has no end points.

Notation $\overleftrightarrow{AB}$.

A *Ray* has only one end point. $\overrightarrow{AB}$
A *segment* has both the end points. $\overline{AB}$

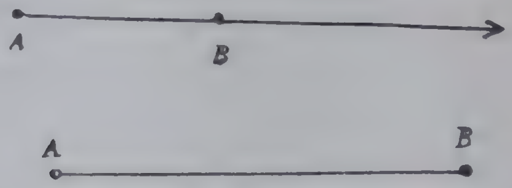


Fig. 1.1(b)

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ರೇಖಾಗಣಿತದ ಮೂಲ ಭಾವನೆಗಳು

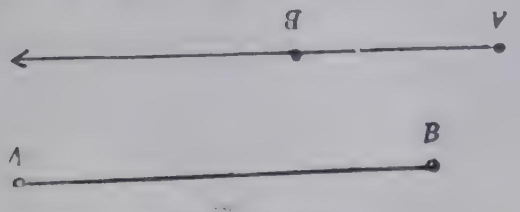
1.1. ಬಿಂದು, ರೇಖೆ, ಸಮತಲ ಮತ್ತು ಆಕಾಶ

ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಎಲ್ಲ ಭಾಗಗಳನ್ನೂ ಕೆಲವು ಮೂಲ ಭಾವನೆಗಳ ಮೇಲೆ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ರೇಖಾಗಣಿತವೂ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು. ಈ ಮೂಲ ಭಾವನೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವಕ್ಕೆ ಉಳಿದವುಗಳಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು. ಆದರೆ ಕೆಲವು ಮೂಲ ಭಾವನೆಗಳಿಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಡುವುದು ಅಸಾಧ್ಯ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಪರಿಮಾಣ ರಹಿತವಾದದ್ದೆಂದೂ ರೇಖೆಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಪರಿಮಾಣವುಳ್ಳದ್ದೆಂದೂ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ನೀಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿಲ್ಲವೆಂಬುದು ನಮಗೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯುವುದು. ಸಮತಲದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯೂ ಹೀಗೆಯೇ. ಮೊದಲು ಪರಿಮಾಣ ಎಂಬ ಪದವೇ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಪೇಕ್ಷಿಸುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಬಿಂದು, ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಸಮತಲ ಇವುಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ನೀಡಲಾಗದ ಇರುವ ಪದಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖೆಯೂ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮತಲವೂ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣ.

ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ ಅಥವಾ ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣವನ್ನು ಆಕಾಶ ಎಂದು ವಿವರಿಸಬಹುದು.

ಚಿತ್ರ 1.1 (ಎ)

ರೇಖೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಿಲ್ಲ, ಎರಡೂ ಕಡೆಗೆ ರೇಖೆಯನ್ನು ಅನಂತವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸಬಹುದು. ಇದರ ಚಿಹ್ನೆ $\overleftrightarrow{AB}$. ಕಿರಣ (Ray) ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದು ಮಾತ್ರ ಇದೆ. ಇದರ ಚಿಹ್ನೆ $\overleftarrow{AB}$. ರೇಖಾಖಂಡವೊಂದಕ್ಕೆ ಎರಡೂ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಇದರ ಚಿಹ್ನೆ $\overline{AB}$.



ಚಿತ್ರ 1.1 (ಬಿ)

1.2 Axioms and postulates—

These are accepted or self-evident truths. No attempt is made to give a proof to these axioms or postulates. The difference between them is not clearly marked. Axioms are those accepted truths which have an appeal to our intuition looking as obvious. Postulates are accepted truths which are not so evident to our intuition.

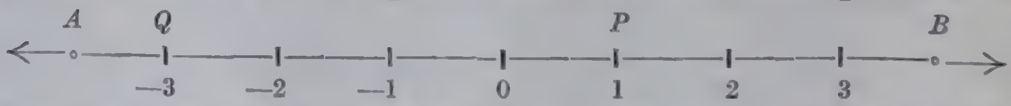
The number of postulates to be accepted is kept at a minimum necessary for the development of the subject. The subject is developed logically basing the logic on these postulates. We arrive at conclusions by making use of these postulates and the conclusions that have been derived already.

Postulate 1: *Given any two different points, there is exactly one line which contains both of them.*

If A and B are different points, the line contained by them is $\overleftrightarrow{AB}$. A set of points is said to be collinear if there exists a line which contains all the points of the set. If the points A, B, C are collinear we say that $\overleftrightarrow{AB}$ passes through C or C lies on $\overleftrightarrow{AB}$.

1.3 Measurement of Distance—

Measurement of distance requires a unit. The length of any line segment is measured in terms of this unit. Let $\overleftrightarrow{AB}$ be a line. Choose a point O on it and represent it by the number 0. Represent another suitable point P on



the line by the number 1. Then we say that the segment $\overline{OP}$ has unit length and $OP=1$. We mark the numbers 2, 3,. . . . . .to the right of OP and to the left of 0 we mark the numbers —1, —2, —3. . . . . In doing so, we are indeed assuming one of the basic postulates.

1.2. ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆಗಳು

ಇವುಗಳು ನಾವು ಸ್ವೀಕರಿಸಿದ ಅಥವಾ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಸತ್ಯಗಳು. ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕೊಡಲು ನಾವು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಿಗೂ ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆಗಳಿಗೂ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಭೇದವೇನೂ ಇಲ್ಲ. ನಮ್ಮ ಅಂತರ್ಬೋಧೆಗೆ ಸಹಜವಾಗಿ ವೇದ್ಯವಾಗುವಂತಹ ಸ್ವೀಕೃತ ಸತ್ಯಗಳಿಗೆ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. ಅಂತರ್ಬೋಧೆಗೆ ಅಷ್ಟು ಸ್ಪಷ್ಟವಲ್ಲದೆ ಇರುವ ಸ್ವೀಕೃತ ಸತ್ಯಗಳಿಗೆ, ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆಗಳೆಂದು ಹೆಸರು.

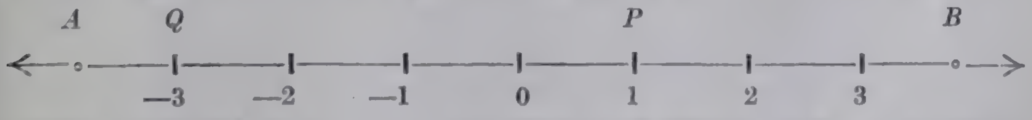
ವಿಷಯದ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಅತ್ಯವಶ್ಯವೆನಿಸುವಷ್ಟು ಮಾತ್ರ ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡು ವಿಷಯವನ್ನು ಈ ಭಾವನೆಗಳ ಮೇಲೆ ತರ್ಕಬದ್ಧವಾಗಿ ರಚಿಸಲಾಗುವುದು. ಈ ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆಗಳನ್ನೂ, ಮೊದಲೇ ಪಡೆದಿರುವ ತೀರ್ಮಾನಗಳನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಹೊಸ ತೀರ್ಮಾನಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಗುವುದು.

ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆ 1 : ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಇವೆರಡನ್ನೂ ಹೊಂದಿರುವಂತಹ ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆ ಇರುವುದು.

A ಮತ್ತು B ಎಂಬುವು ಬೇರೆಯಾದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ರೇಖೆಯು $\overleftrightarrow{AB}$ ಆಗಿರುವುದು. ಬಿಂದುಗಳ ಗಣವೊಂದರ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಹೊಂದಿರುವ ರೇಖೆಯೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. A, B, C ಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿದ್ದರೆ $\overleftrightarrow{AB}$ ಯು C ಯ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದು ಅಥವಾ C ಯು $\overleftrightarrow{AB}$ ಯ ಮೇಲಿದೆ ಎನುತ್ತೇವೆ.

1.3 ದೂರದ ಅಳತೆ

ದೂರದ ಅಳತೆಗೆ ಒಂದು ಮೂಲಮಾನವು ಬೇಕು. ಯಾವುದೇ ರೇಖಾಖಂಡದ ಉದ್ದವನ್ನು ಈ ಮೂಲಮಾನದಿಂದ ಅಳೆಯುತ್ತೇವೆ. AB ಯು ಒಂದು ರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ. ಅದರಲ್ಲಿ O ಎಂಬ ಬಿಂದುವೊಂದನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡು ಅದನ್ನು 0 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಿ. ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದು ಸೂಕ್ತವಾದ ಬಿಂದು Pಯನ್ನು 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಿ. ಈಗ ರೇಖಾಖಂಡ $\overline{OP}$ ಯು ಒಂದು ಮೂಲಮಾನ ಉದ್ದವಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $OP = 1$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.



OPಯ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ 2,3, ... ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು O ಬಿಂದುವಿನ ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ —1, —2, —3 . . . ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವಾಗ ನಿಜವಾಗಿಯೂ ನಾವು ಒಂದು ಮೂಲ ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಒಪ್ಪಿದಂತಾಗಿದೆ.

Postulate 2 : *There exists a one-to-one correspondence between points of a line and the set of all real numbers.*

In other words, with every point on a given line we associate a real number and conversely, every real number corresponds to a point on the line. We call this number as the coordinate of the point. If A and B are any two points on the line with coordinates a and b such that $a<b$ then the length of the segment $\overline{AB}$ is given by $AB=(b-a)$. For example, in the above figure, the length of segment $PQ=1-(-3)=4$ units.

We note that the distance between two points on the line (or the length of the segment) is a positive number. PQ is the same as QP. The unit that we choose may be centimeters, meters, feet, inches, or any other that we may like to choose.

1.4 Betweenness—

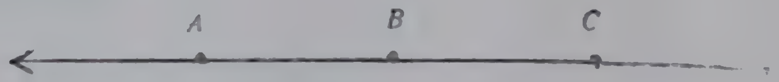


Fig. 1.3

Definition :—

If A, B, C are three points on a line, then B is between A and C if $AB+BC=AC$.

Postulate 3 : If three distinct points lie on a line, one of them lies between the other two.

Theorem :

If A, B, C are points on a line with a, b, c as co-ordinates such that $a<b<c$ then B lies between A and C

Proof :— Since $a<b$, $AB=b-a$

Since $b<c$, $BC=c-b$

Since $a<c$ $AC=c-a$

$$AB+BC=(b-a)+(c-b)=c-a=AC$$

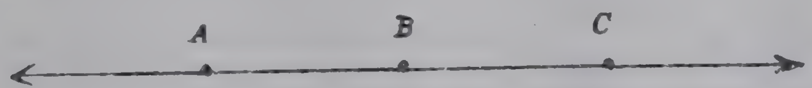
$\therefore$ by definition B lies between A and C

ಸ್ವೀಕೃತಭಾವನೆ 2 : ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಬಿಂದುಗಳಿಗೂ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಕ್ಕೂ ಒಂದು-ಒಂದು ಸಹಗಾಮಿತ ಇದೆ.

ಈ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ವಿವರಿಸಬಹುದು. ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೂ ಸಹ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು ಹೊಂದಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಸಹಗಾಮಿಯಾಗಿ ರೇಖೆಯ ಬಿಂದುವೊಂದಿರುವುದು. A ಮತ್ತು Bಗಳು a ಮತ್ತು b ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಎರಡುಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. $a<b$ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ರೇಖಾಖಂಡ ABಯ ಉದ್ದವು, $AB=(b-a)$ ಆಗಿರುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ರೇಖಾ ಖಂಡ PQವಿನ ಉದ್ದವು $PQ= 1-(-3)=4$ ಮೂಲಮಾನಗಳು.

ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಇರುವ ದೂರವು (ಅಥವಾ ರೇಖಾ ಖಂಡದ ಉದ್ದವು) ಒಂದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಾವು ಆರಿಸುವ ಮೂಲಮಾನವು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಮೀಟರ್, ಅಡಿ, ಇಂಚು, ಅಥವಾ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಆಗಿರಬಹುದು.

1.4 ಅಂತರತೆ



ಚಿತ್ರ 1.3

A, B, C ಎಂಬುವು ರೇಖೆಯೊಂದರ ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. $AB+BC=AC$ ಆಗಿದ್ದರೆ B ಯು A ಮತ್ತು C ಗಳ ನಡುವೆ ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆ 3 : ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಏಕ ರೇಖಸ್ಥವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಉಳಿದೆರಡರ ನಡುವೆ ಇರುವುದು.

ಪ್ರಮೇಯ : ರೇಖೆಯೊಂದರ ಮೇಲೆ A, B, C ಎಂಬುವುಗಳು a, b, c, ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. $a<b<c$ ಆಗಿದ್ದರೆ, Bಯು A ಮತ್ತು Cಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವುದು.

ಸಾಧನೆ : $a<b$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $AB=(b-a)$

$b<c$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $BC=(c-b)$

$a<c$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $AC=(c-a)$

$$AB+BC=(b-a) + (c-b) = (c-a) = AC.$$

ಆದ್ದರಿಂದ Bಯು A ಮತ್ತು Cಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವುದು.

Definition :

A point B is said to be the mid-point of a segment AC if B is between A and C and $AB = BC$.

Theorem :

Every segment has exactly one mid-point.

Suppose that B is the mid-point of AC,

Fig. 1.4

then $AB + BC = AC$

also $AB = BC$

Hence we have $2AB = AC$ or $AB = 1/2\ AC$

By postulate 2 we see that there is exactly one such point. B is said to bisect the segment AC.

1.5 Planes—

A plane is specified by the following postulates :

Postulate 4: Given any three non-collinear points, there is exactly one plane containing them.

Postulate 5: Given two distinct points P and Q on a plane, then the line $\overleftrightarrow{PQ}$ containing these points lies in the same plane.

Postulate 6: If two different planes intersect, they intersect in a line.

Theorem :

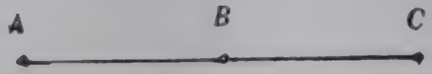
If two lines intersect, they intersect in only one point.

Proof :—If two lines l and m intersect in two points P and Q, then each of P and Q belong to both l and m. But by postulate 1, there is only one line containing the two points. This contradicts our assumption. Hence the theorem.

ವ್ಯಾಖೆ : B ಬಿಂದುವು A ಮತ್ತು Cಗಳ ನಡುವೆ ಇದ್ದು $AB=BC$ ಆಗಿದ್ದರೆ Bಯನ್ನು ACಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ : ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೂ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿದೆ.

ಸಾಧನೆ: B ಯು ACಯು ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 1.4

ಈಗ $AB+BC=AC$

ಮತ್ತು $AB=BC$

ಆದ್ದರಿಂದ $2AB=AC$ ಅಥವಾ $AB=\frac{1}{2}AC$. 2 ನೆಯ ಸ್ವೀಕೃತಭಾವನೆಯಿಂದ ಇಂತಹ ಬಿಂದು ಒಂದೇ ಒಂದು ಇರುವುದು, ರೇಖಾಖಂಡ ACಯನು Bಯು ಅರ್ಧಿಸುವುದೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

1.5 ಸಮತಲಗಳು

ಸಮತಲವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಭಾವನೆಗಳಿಂದ ನಿಶ್ಚಿತಗೊಳಿಸಲಾಗುವುದು.

ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆ 4 : ಏಕರೇಖಸ್ಥವಲ್ಲದ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ದತ್ತವಾದಾಗ ಅವುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತಹ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಮತಲ ಇರುವುದು,

ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆ 5 : ಸಮತಲ ಒಂದರಮೇಲೆ P, Q ಎಂಬ ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಬಿಂದುಗಳು ದತ್ತವಾದಾಗ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ರೇಖೆ $\overleftrightarrow{PQ}$ ಅದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವುದು.

ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆ 6 : ಎರಡು ಸಮತಲಗಳು ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಅವುಗಳ ಛೇದನವು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಾಗಿರುವುದು.

ಪ್ರಮೇಯ: ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಅವುಗಳ ಛೇದನವು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರುವುದು.

ಸಾಧನೆ: ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ l ಮತ್ತು m ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು P ಮತ್ತು Q ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಈಗ P ಮತ್ತು Q ಗಳೆರಡೂ, l ಮತ್ತು m ಗಳಿಗೆ ಸೇರಿರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ 1ನೆಯ ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆಯಿಂದ ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆ ಇರುವುದು. ಇದು ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ವಿರೋಧಿಸುವುದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯುವು ಸಾಧಿತವಾಗುವುದು.

Theorem :

If a line and a plane not containing it, intersect, their intersection is a single point.

For, if the intersection consists of two points of the line then by postulates, the line must entirely lie in the plane.

Theorem :

A line and a point not on the line, determine one and only one plane.

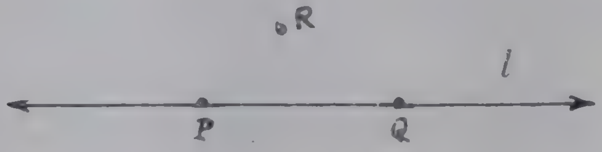


Fig. 1·5

Take two points P and Q on the given line l. These two points determine the line l. Now the three non-collinear points P, Q, R determine a plane.

Theorem :

Given two intersecting lines, there is exactly one plane containing them. Let the two lines have A as their intersection. Let B and C be points lying on l and m. Now the three **non**-collinear points determine a plane.

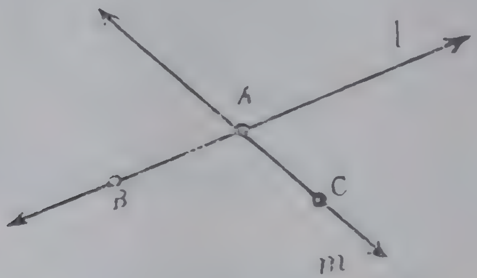


Fig. 1.6

1.6 The Measurement of an angle

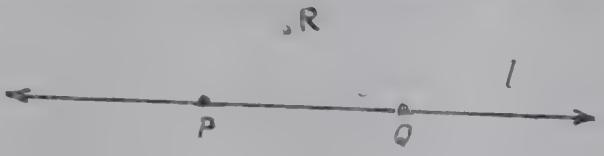
Definition :

An angle is defined as the union of two rays having the same end point. The union of $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AC}$ having the

ಪ್ರಮೇಯ: ಒಂದು ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಹೊಂದದೆ ಇರುವ ಒಂದು ಸಮತಲ, ಇವೆರಡೂ ಛೇದಿಸಿದರೆ ಅವುಗಳ ಛೇದನವು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರುವುದು.

ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣ, ಛೇದನದಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿದ್ದರೆ, ಆಗ 5 ನೆಯ ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆಯಿಂದ ರೇಖೆಯು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯೇ ಇರಬೇಕಾಗುವುದು.

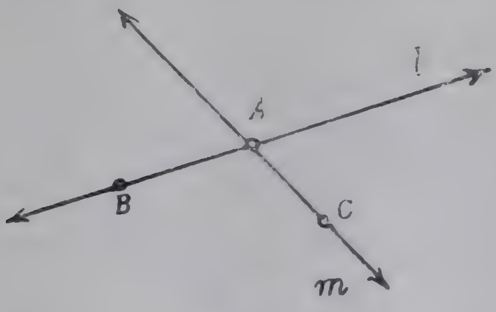
ಪ್ರಮೇಯ: ಒಂದು ರೇಖೆಯೂ ಮತ್ತು ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿಲ್ಲದೆ ಇರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವೂ ಸೇರಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಮತಲವನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತಗೊಳಿಸುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 1.5

ದತ್ತರೇಖೆ l ಮೇಲೆ P ಮತ್ತು Q ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು l ರೇಖೆಯನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತಗೊಳಿಸುತ್ತವೆ. ಈಗ ಏಕರೇಖಸ್ಥವಲ್ಲದ P, Q, R, ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಮತಲವನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತಗೊಳಿಸುತ್ತವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ: ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ದತ್ತವಾದಾಗ ಅವುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಮತಲವಿರುವುದು.



ಚಿತ್ರ 1.6

A ಎಂಬುದು ಈ ರೇಖೆಗಳ ಛೇದನವಾಗಿರಲಿ. B ಮತ್ತು C ಗಳು l ಮತ್ತು m ಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. ಈಗ ಏಕರೇಖಸ್ಥವಲ್ಲದ ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ಸಮತಲವನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತಗೊಳಿಸುತ್ತವೆ.

1·6 ಕೋನದ ಅಳತೆ

ಒಂದೇ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುವಿರುವಂತಹ ಎರಡು ಕಿರಣಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಗೆ ಕೋನವೆಂದು ಹೆಸರು. $\overrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{AC}$ ಕಿರಣಗಳಿಗೆ A ಎಂಬುದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಂತ್ಯ

same end point A is the angle denoted by $\angle BAC$ or $\angle CAB$. Sometimes it is also written as $\angle A$

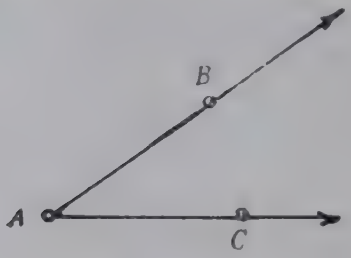


Fig. 1·7

Postulate 7: To every angle there corresponds a number between 0 and 180. It is called the measure of the angle.

The measure of an angle is represented in degrees. Since the measure of an angle is a positive real number, angles may be added and subtracted in the same way as real numbers.

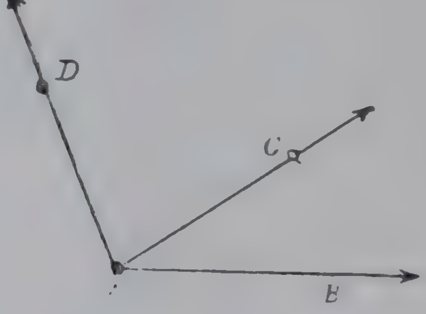
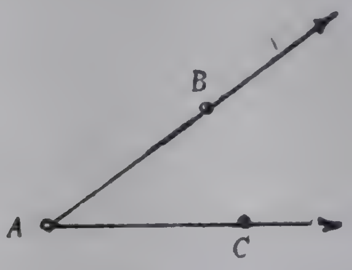


Fig. 1.8

For example, if $\angle BAC = 40°$
and $\angle CAD = 60°$
then $\angle BAC + \angle CAD = 100°$

The ray $\overrightarrow{AC}$ is said to be between $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AD}$ if C lies to the same side of AB as D and C lies to the same side of AD as B.

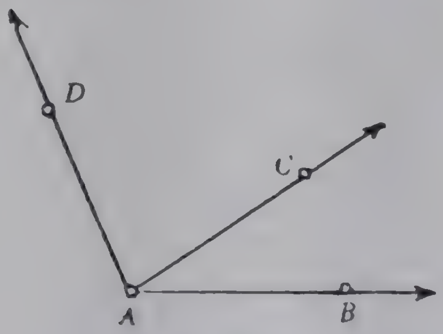
ಬಿಂದು. ಇವುಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಯಿಂದಾದ ಕೋನವನ್ನು $\angle BAC$ ಅಥವಾ $\angle CAB$ ಅಥವಾ $\angle A$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 1.7

<u>ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆ 7 :</u> ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನಕ್ಕೂ ಸಹಗಾಮಿಯಾಗಿ 0 ಮತ್ತು 180 ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಆ ಕೋನವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವುದು. ಅದ್ದರಿಂದ ಇದು ಆ ಕೋನದ ಅಳತೆ.

ಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಡಿಗ್ರಿಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಕೋನದ ಅಳತೆಯು ಧನ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದುದರಿಂದ ಕೋನಗಳನ್ನು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕೂಡಬಹುದು ಮತ್ತು ಕಳೆಯಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 1.8

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\angle BAC = 40^\circ$ ಮತ್ತು $\angle CAD = 60^\circ$ ಆದರೆ

$$\angle BAC + \angle CAD = 100^\circ$$

C ಮತ್ತು D ಗಳು AB ಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿಯೂ ಮತ್ತು C ಮತ್ತು B ಗಳು AD ಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವಂತೆಯೂ ಇದ್ದರೆ, $\overrightarrow{AC}$ ಯು $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AD}$ ಗಳ ನಡುವೆ ಇದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

We have :

(i) $\angle BAD + \angle CAD = \angle BAC$
(ii) $\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD$
(iii) $\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC$

Two rays $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AC}$ are said to form an opposite pair if $\angle BAC = 180°$.

Definition : Two angles are said to be supplementary if the sum of their measures is 180° and complementary if the sum of their measure is 90°.

Example : The supplement of an angle of measure 50° is an angle of measure 130°. The complement is an angle of measure 40°.

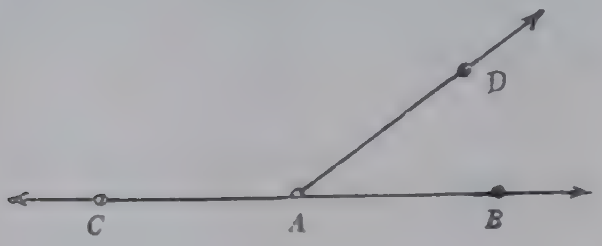


Fig. 1.9

Definition: If $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AC}$ are opposite pairs and $\overrightarrow{AD}$ another ray, then the angles $\angle BAD$ and $\angle DAC$ are said to form a linear pair.

The sum of the measures of a linear pair of angles is 180°. The angles of a linear pair are supplementary.

Definition: If the two angles of a linear pair have the same measure, then each is said to be right angle.

Note :—We have proved that there is only one mid-point for a line segment. Similarly, there is only one ray bisecting a given angle. The measure of a right angle is 90°. Two lines are said to be perpendicular if they

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ

(i) $\angle BAD + \angle CAD = \angle BAC$

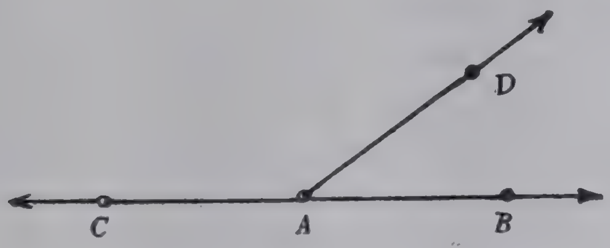
(ii) $\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD$

(iii) $\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC$

$\angle BAC = 180^\circ$ ಆದರೆ, AB ಮತ್ತು AC ಗಳು ವಿರುದ್ಧವಾಗಿವೆ ಅಥವಾ ಎದುರು ಬದುರಾಗಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಎರಡುಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಳಕೋನಪೂರಕವೆಂದೂ, 90° ಆದರೆ ಅವು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಕೋನಪೂರಕವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: 50° ಅಳತೆ ಇರುವ ಕೋನದ ಸರಳಕೋನ ಪೂರಕವು 130° ಅಳತೆ ಇರುವ ಒಂದು ಕೋನ. ಅದರ ಸಮಕೋನ ಪೂರಕವು 40° ಅಳತೆಯಿರುವ ಒಂದು ಕೋನ.



ಚಿತ್ರ 1.9

$\overrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{AC}$ ಗಳು ವಿರುದ್ಧವಾಗಿದ್ದು $\overrightarrow{AD}$ ಯು ಮತ್ತೊಂದು ಕಿರಣವಾದರೆ, $\angle BAD$ ಮತ್ತು $\angle DAC$ ಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಜತೆ ಪಂಕ್ತೀಯ ಕೋನಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. ಒಂದು ಜತೆ ಪಂಕ್ತೀಯ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ, ಎರಡೂ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ಸಮಕೋನವೆಂದು ಹೆಸರು.

ಸೂಚನೆ: ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿದೆಯೆಂದು ನಾವು ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಹೀಗೆಯೇ ದತ್ತಕೋನವೊಂದನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಕಿರಣವಿರುವುದು. ಸಮಕೋನದ ಅಳತೆಯು 90° ಇರುವುದು. ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಸಮಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅವು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

contain a right angle. We also say that $\overleftrightarrow{AB}$ is perpendicular to $\overrightarrow{AC}$ or the segment $\overline{AB}$ is perpendicular to segment $\overline{AC}$

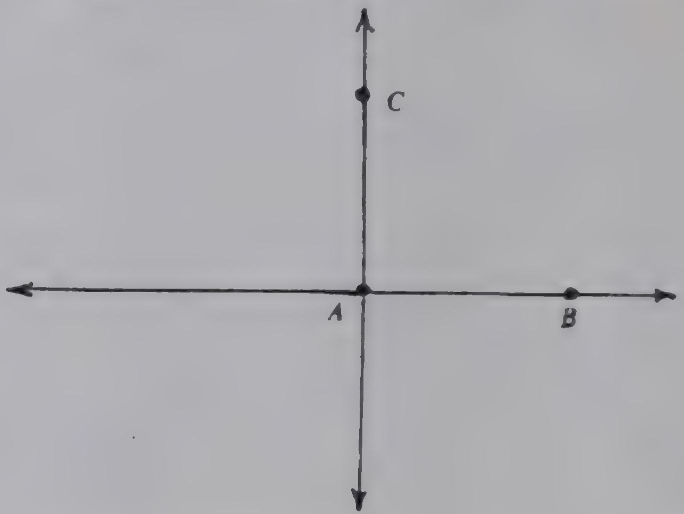


Fig 1.10

1.7. Definition of a triangle—

If A, B, C are any three non-collinear points, then the union of the segments $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ and $\overline{AC}$ is called a triangle. It is denoted by $\triangle ABC$. The segments $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, and $\overline{AC}$ are called its sides ; and A, B, C are called its vertices.

The triangle determines three angles :

$$\angle BAC, \quad \angle BCA \text{ and } \angle ABC.$$

$\angle BAC$ is the angle formed by the rays $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AC}$. The sides of an angle are rays and the sides of a triangle are segments. So the triangle determines three angles while it does not actually contain them.

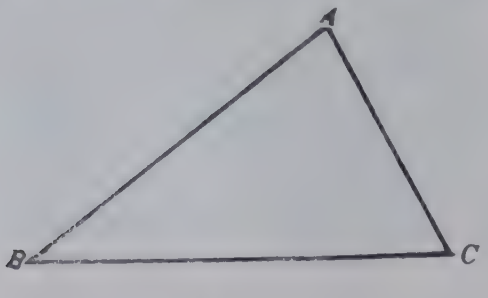
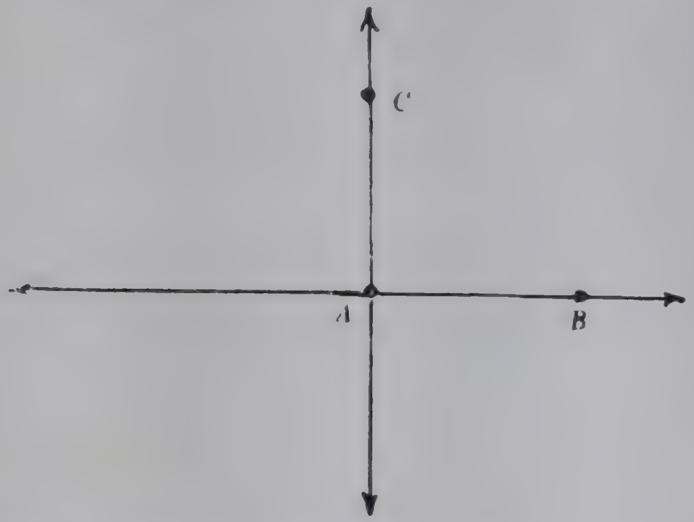


Fig. 1.11

$\overrightarrow{AB}$ ಯು $\overrightarrow{AC}$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಅಥವಾ ರೇಖಾಖಂಡ $\overline{AB}$ ಯು ರೇಖಾ ಖಂಡ $\overline{AC}$ಗೆಲಬವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 1.10

1·7 ತ್ರಿಭುಜದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

A, B, Cಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಲ್ಲದ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಾದರೆ, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ಮತ್ತು $\overline{AC}$ ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಗೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವೆಂದು ಹೆಸರು. ಇದನ್ನು $\triangle ABC$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ಮತ್ತು $\overline{AC}$ ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳೆಂದೂ A, B, C ಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳೆಂದೂ ಹೆಸರು. ತ್ರಿಭುಜವು ಮೂರು ಕೋನಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದು: $\angle BCA$, $\angle BAC$ ಮತ್ತು $\angle ABC$.

$\angle BAC$ ಯು $\overrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{AC}$ ಕಿರಣಗಳಿಂದಾದ ಕೋನ. ಕೋನದ ಬಾಹುಗಳು ಕಿರಣಗಳು, ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು ರೇಖಾಖಂಡಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವು ಮೂರು ಕೋನಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಚಿತ್ರ 1·11

1.8 Polygon—

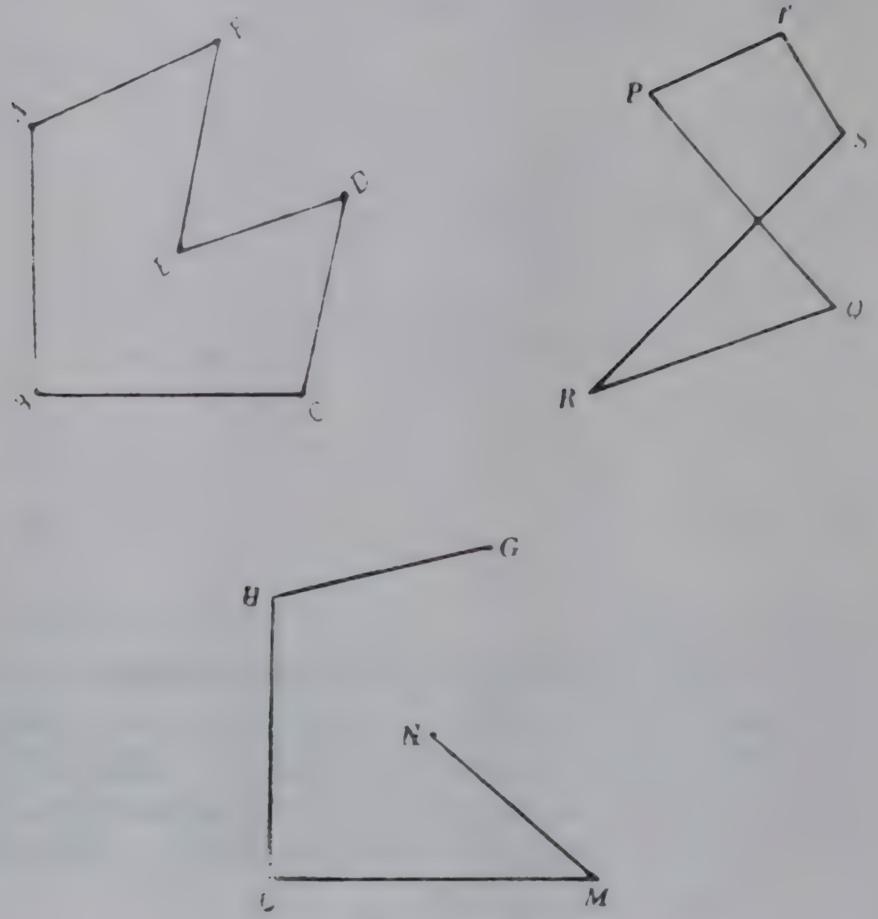
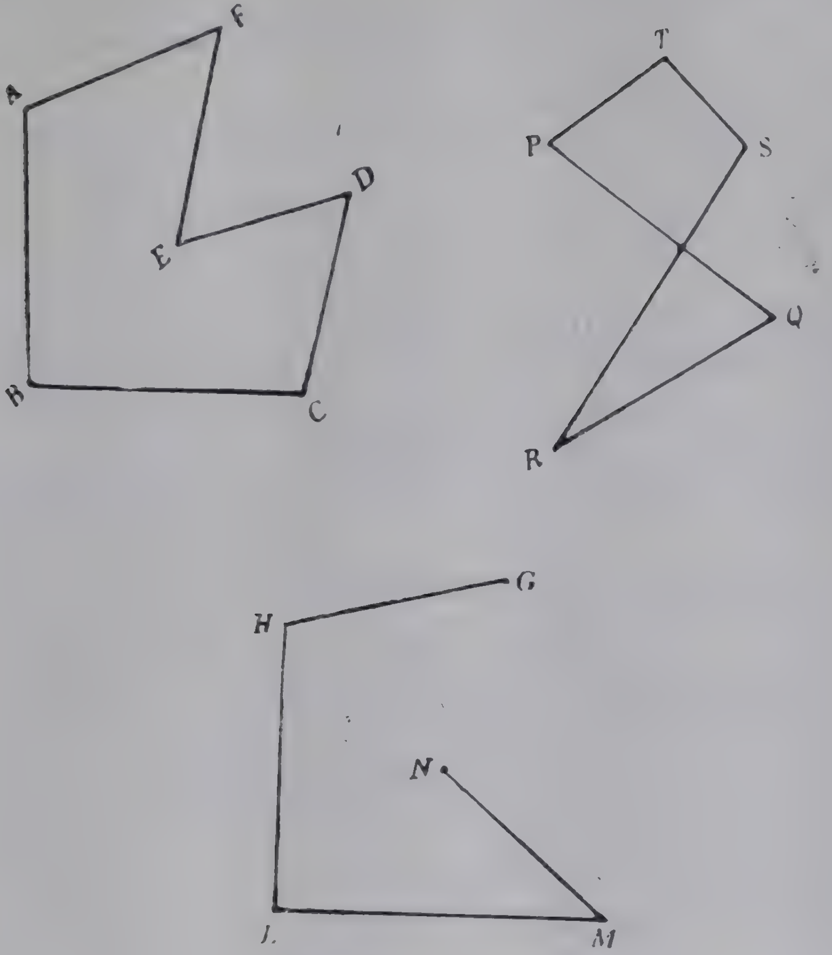


Fig. 1.12

ABCDEF is a polygon while the other two figures are not polygons.

A polygon is the union of a number of line segments in a plane such that the beginning and the end points coincide, and no two segments intersect except at their end points. The segments are called sides. A triangle is a special case of a polygon. A polygon with n sides has n vertices, and determines n angles.

1·8 ಬಹು ಭುಜಗಳು



ಚಿತ್ರ 1.12

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $ABCDEF$ ಎಂಬುದು ಬಹುಭುಜ, ಆದರೆ ಉಳಿದೆರಡು ಚಿತ್ರಗಳೂ ಬಹುಭುಜಗಳಲ್ಲ.

ಮೊದಲನೆಯ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವಂತಹ ಅನೇಕ ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಯು ಒಂದು ಬಹುಭುಜ. ಇದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ಅವುಗಳ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ವಿನಾ ಬೇರೆಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಗೆ ಬಾಹುಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. ತ್ರಿಭುಜವೂ ಸಹ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಭುಜ. n ಬಾಹುಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜಕ್ಕೆ n ಶೃಂಗಗಳಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಅದು n ಕೋನಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆ.

1.9 Parallel lines—

Fig. 1.13

Definition : Two different lines lying in the same plane are said to be parallel if they have no point in common.

$\overleftrightarrow{AB}$ and CD are parallel if $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \phi$

We also say that the segment AB is parallel to segment CD. We denote them by writing $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ and $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

Given a line $\overleftrightarrow{AB}$, the existence of a line parallel to $\overleftrightarrow{AB}$ is assured by the following postulate.

Postulate 8: Given a line and a point not on the line, there is one and only one line through the given point parallel to the given line.

This postulate is often referred to as 'Euclid's fifth postulate' or the parallel postulate.

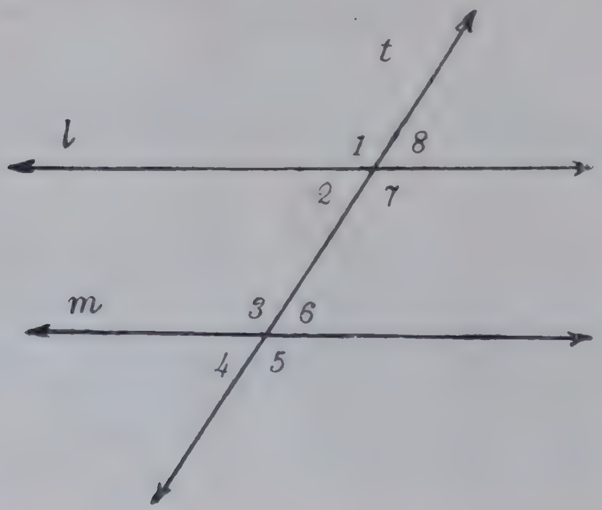
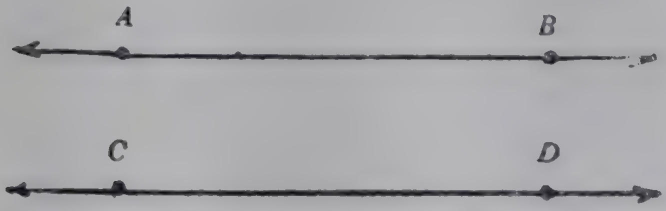


Fig. 1.14

1·9 ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು

ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವೊಂದಿಲ್ಲದಿದ ರೆ, ಅಂತಹ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳೆಂದು ಹೆಸರು.

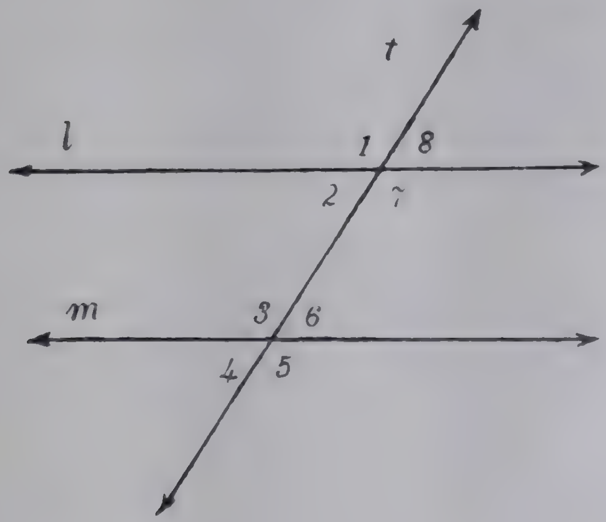


ಚಿತ್ರ 1.13

$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \phi$ ಆದರೆ, $\overleftrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{CD}$ ಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ. $\overline{AB}$ ರೇಖಾಖಂಡವು $\overline{CD}$ ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರ ವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ಅಥವಾ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

AB ರೇಖೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯೊಂದಿರು ವುದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆಯು ದೃಢಪಡಿಸುವುದು.

<u>ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆ 8</u>:—ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನೂ, ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿಲ್ಲದ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟಾಗ, ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತಹ ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆ ಇರುವುದು. ಇದನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡನ 5ನೆಯ ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆ ಎಂದೂ ಹೇಳುವುದುಂಟು.



ಚಿತ್ರ 1.14

Let l and m be two parallel lines. The line t in the figure is called a transversal. The angles 2, 6 and 3, 7 are called alternate angles, and the angles 1,3 ; 2,4 ; 5, 7 ; 6,8 are called corresponding angles.

Theorem :

Given two lines and a transversal, the two lines are parallel if the alternate angles are equal.

Suppose, the lines are not parallel, let them intersect in C. Then ABC is a triangle and the exterior angle (1) is greater than the interior opposite angle (2). But this contradicts the hypothesis. Hence the theorem.

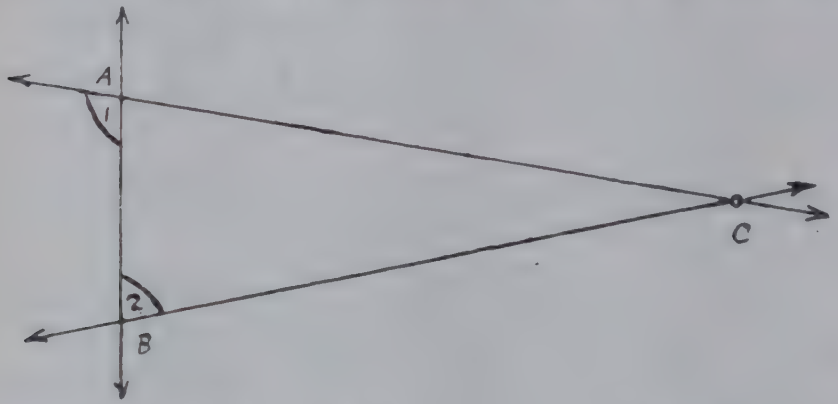


Fig. 1.15

We merely, state the converse of this theorem viz., 'If the alternate angles are equal then the two lines are parallel'.

John Playfair a British Mathematician in 1858 stated the parallel postulate in a different form :—"Two intersecting lines cannot both be parallel to the same straight line". We easily see that this is equivalent to Postulate 8.

Exercises 1.1

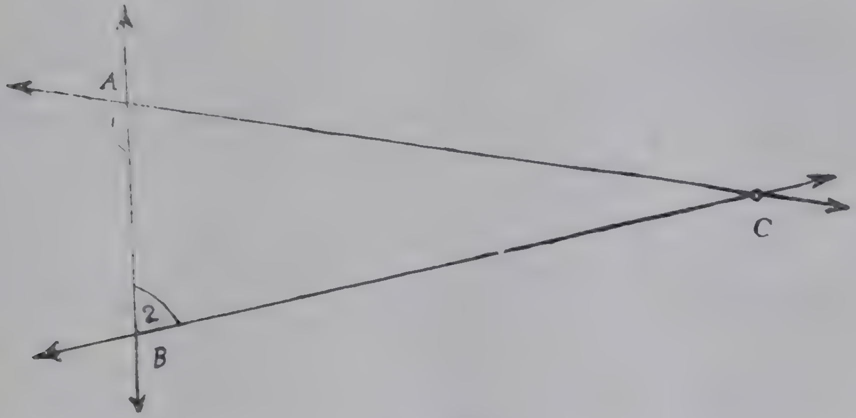
1 If l and m are two intersecting lines, what is $l \cap m$?

2 Let A be the set of numbers $\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ and B be $\{1, 2, 4, 5, 6, 9\}$. (*a*) State whether the following statements are true or false :

(i) $8 \in A$ (ii) $4 \notin A$ (iii) $9 \in B$ (iv) $5 \in A \cup B$, (v) 4 belongs to both A and B

l ಮತ್ತು m ಗಳು ಎರಡು ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ರೇಖೆ t ಎಂಬುದನ್ನು ಛೇದಕ ರೇಖೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. 2, 6 ಮತ್ತು 3, 7 ಕೋನಗಳಿಗೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳೆಂದೂ 1,3 ; 2,4 ; 5,7 ; 6,8 ; ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಹಗಾಮಿ ಕೋನಗಳೆಂದೂ ಹೆಸರು.

ಪ್ರಮೇಯ: ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು ಒಂದು ಛೇದಕ ರೇಖೆಯನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಪರ್ಯಾಯಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುವು.



ಚಿತ್ರ 1.15

ಸಾಧನೆ: ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳು C ಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಈಗ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ, ಹೊರಕೋನ (1), ಅಂತಸ್ಥಾಭಿಮುಖ ಕೋನ (2) ಕ್ಕಿಂತ ಗುರುತರವಾಗಿರುವುದು. ಇದು ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ವಿರೋಧಿಸುವುದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯವು ಸಾಧಿತವಾಗುವುದು. ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು ಸಮವೆಂಬ ಮೇಲಣ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಣೆ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಜಾನ್ ಪ್ಲೇಫರ್ ಎಂಬ ಬ್ರಿಟನ್ನಿನ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನು 1858ರಲ್ಲಿ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿದನು. "ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವಂತಹ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳೂ ಮತ್ತೊಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ." ಇದು 8ನೆಯ ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆಗೆ ಸಮಾನವೆಂಬುದು ಸುಸ್ಪಷ್ಟ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 1.1

1 l ಮತ್ತು m ಎಂಬುವು ಎರಡು ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಗಳಾದರೆ $l \cap m = ?$

2 $A = \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ ಮತ್ತು $B = \{1, 2, 4, 5, 6, 9\}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಗಳಾದರೆ,

(a) ಈ ಉಕ್ತಿಗಳು ಸರಿಯೋ ತಪ್ಪೋ ತಿಳಿಸಿ.

(i) $8 \in A$ (ii) $4 \notin A$ (iii) $9 \in B$ (iv) $5 \in A \cup B$ (v) 4 ಎಂಬುದು A ಮತ್ತು B ಗಳೆರಡಕ್ಕೂ ಸೇರಿದೆ.

(*b*) What is the union of A and B ?

(*c*) What is the intersection of A and B ?

3 If a circle be one set and a line be another set find the intersection of the two in each of the following cases :

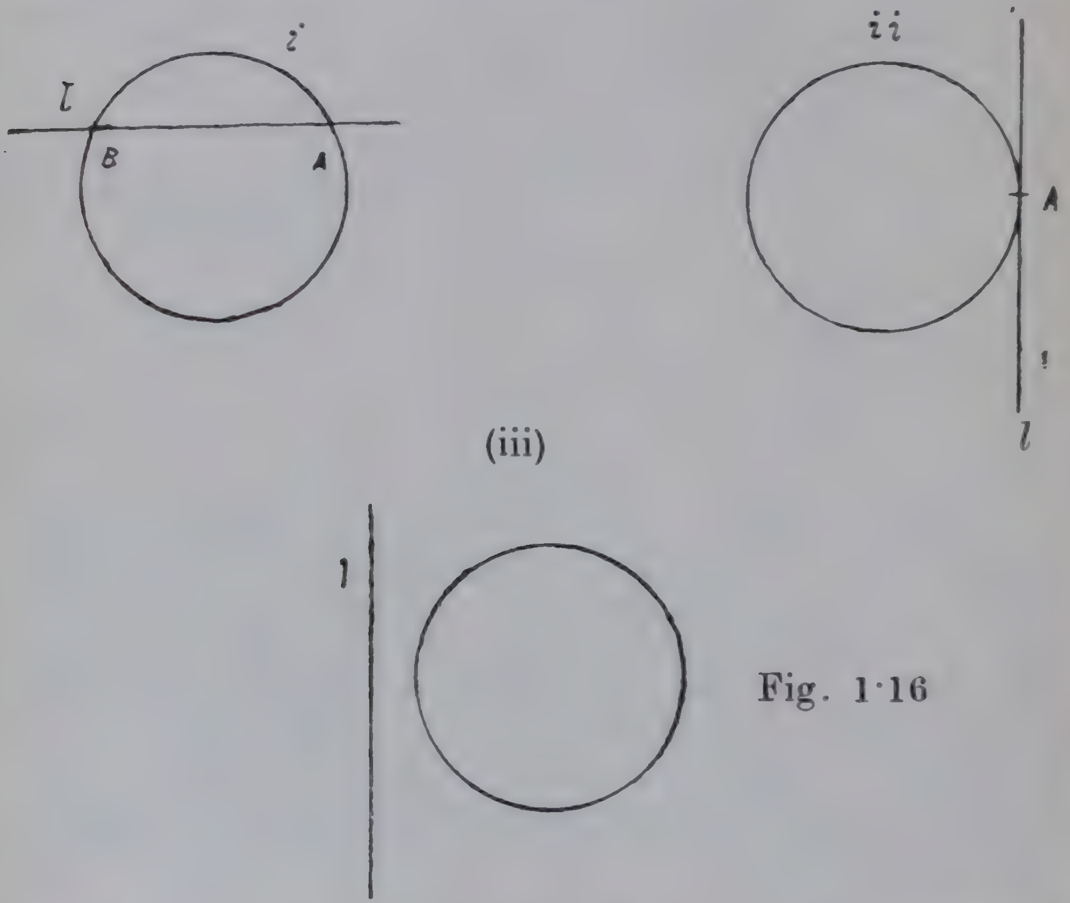


Fig. 1·16

4 A co-ordinate system is set up on a line. What is the distance between the following pairs of points :

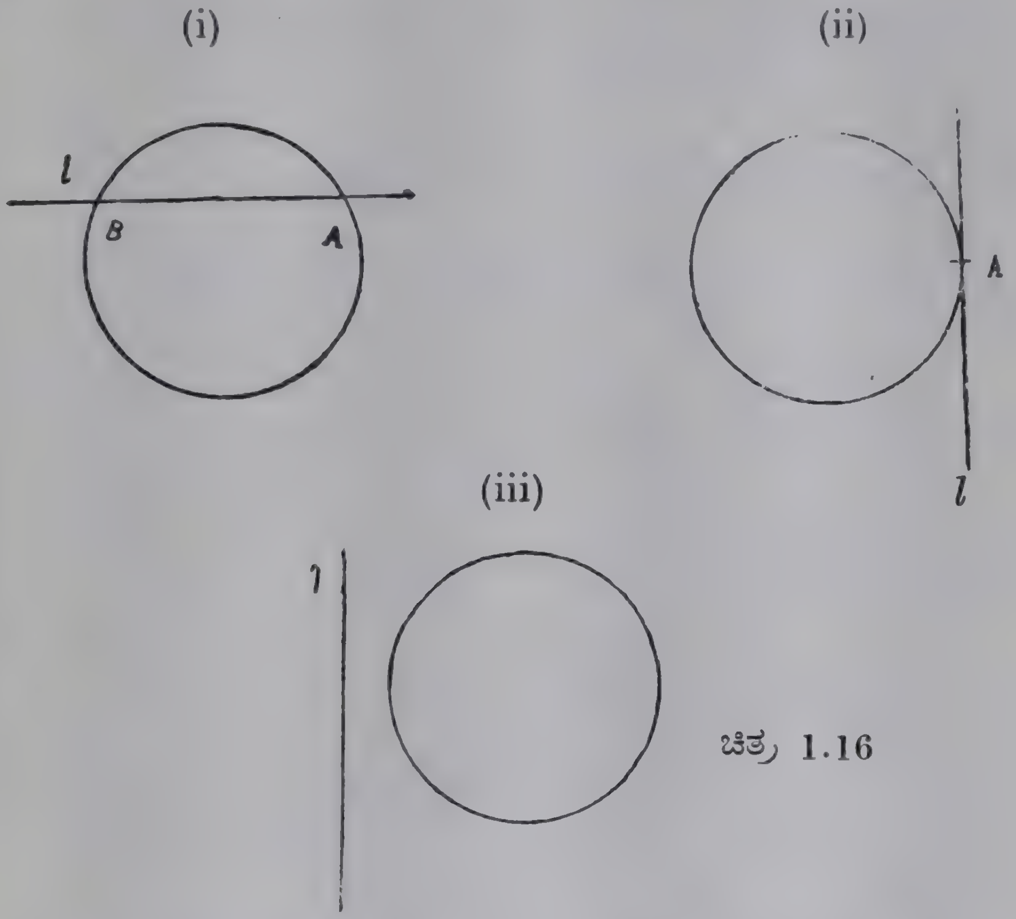
(i) 0,5 (ii) 6,3 (iii) $-5,8$ (iv) $-3,-7$ (v) 4,$-$3.

5 A co-ordinate system is set up on a line. A new coordinate system is set up on the line by the following

(*b*) A ಮತ್ತು Bಗಳ ಸಂಯೋಜನೆ ಏನು ?

(*c*) A ಮತ್ತು Bಗಳ ಛೇದನ ಏನು ?

3 1.16 ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವು ಒಂದು ಗಣವಾಗಿಯೂ, ರೇಖೆಯು ಮತ್ತೊಂದು ಗಣವಾಗಿಯೂ ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ ಈ ಗಣಗಳ ಛೇದನವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 1.16

4 ರೇಖೆಯೊಂದರ ಮೇಲೆ ಒಂದು ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜತೆ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ದೂರವೇನು ?

(i) 0, 5 (ii) 6, 3 (iii) —5, 8 (ii) —3, —7 (v) 4,—3.

5 ರೇಖೆಯೊಂದರ ಮೇಲೆ ಒಂದು ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಯಮದಿಂದ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದು ಹೊಸ ನಿರ್ದೇಶಕ

rule "The new coordinate of a point is its old co-ordinate plus 2". The distance between any two points in the new system is the same as in the old system—Is this statement true ? Why ?.

6 3 towns A, B, C are in a line. The distance from A to B is 20 miles, from B to C is 30 miles and from A to C is 10 miles. Which of them is between the other two ?

7 A, B, C are 3 collinear points. $AB = 12''$ and $BC = 16''$. Is there only one way of arranging these points ?

8 a, b, c, are the co-ordinates of 3 points with $b < a$ and $c > a$. Which point lies between the other two ?

9 There are 10 points in a line. How many of them are such that "the point lies between the other two points"?

10 If four points on a plane are given, no three of them being collinear, how many lines can be drwan passing through them taken two at a time ?

11 How many planes contain a given point? two given points ? three given points ?

12 The points A, B, C, D lie in a plane. The points A, B, C, E also lie in a plane. Are A, B, D and E in the same plane ?

13 Prove that two parallel lines determine a plane.

ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿದೆ—"ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಹೊಸ ನಿರ್ದೇಶಕವು ಹಳೆಯ ನಿರ್ದೇಶಕಕ್ಕೆ 2ನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಬರುವುದು.'' ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಹೊಸ ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯೂಹದಲ್ಲಿ ಇರುವ ದೂರವು ಹಳೆಯ ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯೂಹದಲ್ಲಿರುವಷ್ಟೇ ಇರುವುದು.—ಈ ಉಕ್ತಿಯು ಸರಿಯೇ ತಪ್ಪೇ ? ಏಕೆ ?

6 $A,B,C,$ ಎಂಬ ಮೂರು ಪಟ್ಟಣಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆ. A ಯಿಂದ B ಗೆ ಇರುವ ದೂರ 20 ಮೈಲಿ, B ಯಿಂದ C ಗೆ 30 ಮೈಲಿ ಮತ್ತು A ಯಿಂದ C ಗೆ 10 ಮೈಲಿ. ಯಾವ ಪಟ್ಟಣವು ಉಳಿದೆರಡರ ನಡುವೆ ಇದೆ ?

7 A,B,C ಗಳು ಮೂರು ಏಕರೇಖಸ್ಥ ಬಿಂದುಗಳು. $AB=12''$, $BC=16''$ ಆದರೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸುವ ವಿಧಾನ ಒಂದು ಮಾತ್ರವೇ ಇದೆಯೇ ?

8 ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಮೂರುಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $a, b, c,$ ಆಗಿವೆ. $b<a$ ಮತ್ತು $c>a$ ಆದರೆ ಯಾವ ಬಿಂದುವು ಉಳಿದೆರಡರ ನಡುವೆ ಇರುವುದು ?

9 ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ 10 ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಎಷು ಬಿಂದು ಗಳು ಬೇರೆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ ?

10 ಸಮತಲವೊಂದರ ಮೇಲೆ 4 ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಯಾವ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳೂ ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿಲ್ಲ. ಹಾಗಿದ್ದರೆ, ಎರಡೆರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೇಲೆ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಎಷ್ಟು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಸಾಧ್ಯ ?

11 ದತ್ತ ಬಿಂದುವೊಂದನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎಷ್ಟು ಸಮತಲಗಳಿರುತ್ತವೆ ? ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮತಲಗಳೆಷ್ಟು ? ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮತಲಗಳೆಷ್ಟು ?

12 A,B,C,D ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿವೆ. A,B,C,E ಬಿಂದುಗಳೂ ಸಹ ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿವೆ. A,B,D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳೂ ಸಹ ಒಂದೇ ಸಮತಲ ದಲ್ಲಿವೆಯೇ ?

13 ಎರಡು ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಸಮತಲವನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತ ಗೊಳಿಸುತ್ತವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

CHAPTER 2

Ratio and Proportion

2.1 Comparison of two quantities of the same kind is done by means of ratios. The ratio of two quantities of the same kind is defined as the quotient of their measures in the same unit. For example, the ratio of Rs. 2.30 p. and Rs. 8.05 p. is $\frac{230}{805}$ or $\frac{2}{7}$. It is also written as 2 : 7. Similarly the ratio of 1 hr. 3m. 36 secs.; 2 hrs. 7m. 12 secs. and 2 hrs. 49m. 36 secs. is 3816 : 7632 : 10176 or 3 : 6 : 8.

When two ratios are equal we say that the terms of the ratios are in Proportion. For example, if

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (or\ a:b=c:d)$$

then a, b, c, d are said to be in proportion and d is called the fourth proportional. Similarly if $a : b : c = d : e : f$ then the six terms are said to be in proportion. In geometry we compare lengths of line segments, areas of figures, measures of angles, etc.

2.2 Division of a line segme

In the previous chapter we have stated a postulate that there exists a one-to-one correspondence between points of a line and the set of all real numbers. Also given three points on a line, we stated that one of them lies between the other two. Suppose the point C lies between the other two points A and B. Let the length of the line segment $\overline{AC}=m$ units and $\overline{CB}=n$ units. Then the ratio of the two lengths is $m : n$ (m and n are positive real numbers). We say that the line segment $\overline{AB}$ is divided internal y in the ratio $m : n$ at the point C.

Fig. 2.1

For Example : If $AC=2.6$ cms and $CB=3.9$ cms $AC : CB=2.6 : 3.9=2 : 3$ Or we write $\frac{AC}{CB} = \frac{2}{3}$.

ಅಧ್ಯಾಯ 2

ಪ್ರಮಾಣ ಮತ್ತು ಅನುಪಾತ

2·1 ಸಜಾತೀಯವಾದ ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಹೋಲಿಸಲು 'ಪ್ರಮಾಣ'ವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸಜಾತೀಯ ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳ ಪರಿಮಾಣಗಳ ಪ್ರಮಾಣವು, ಒಂದೇ ಮೂಲಮಾನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದರ ಎಷ್ಟು ಪಾಲು ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ರೂ. 2-30 ಪೈ. ಮತ್ತು ರೂ. 8-05 ಪೈ. ಇವುಗಳ ಪ್ರಮಾಣವು $\frac{230}{805}$ ಅಥವಾ $\frac{2}{7}$. ಇದನ್ನು $2:7$ ಎಂದೂ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆಯೇ 1 ಗಂ. 3 ನಿ. 36 ಸೆ., 2 ಗಂ. 7 ನಿ. 12 ಸೆ. ಮತ್ತು 2 ಗಂ. 49 ನಿ. 36 ಸೆ. ಇವುಗಳ ಪ್ರಮಾಣವು $3816:7632:10176$ ಅಥವಾ $3:6:8$.

ಎರಡು ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಒಂದೇ ಆದಾಗ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (ಅಥವಾ $a:b=c:d$) ಆದರೆ, a, b, c, d ಗಳು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ. d ಯು a, b, c ಗಳ ಚತುರ್ಥಾನುಪಾತಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆಯೇ $a:b:c=d:e:f$ ಆದಾಗ, ಇಲ್ಲಿರುವ ಆರುಪದಗಳು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಾವು ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಉದ್ದ, ಆಕೃತಿಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು, ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಮುಂತಾದುವುಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುತ್ತೇವೆ.

2·2 ರೇಖಾ ಖಂಡವನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸುವುದು

ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಬಿಂದುಗಳಿಗೂ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಕ್ಕೂ ಒಂದು-ಒಂದು ಸಹಗಮ್ಯತೆ ಇದೆ ಎಂಬ ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದ್ದೇವೆ. ಇದೂ ಅಲ್ಲದೆ, ದತ್ತ ರೇಖೆಯಮೇಲೆ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಉಳಿದೆರಡರ ನಡುವೆ ಇರುವುದು ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ಹೇಳಿದ್ದೇವೆ. C ಬಿಂದುವು, A ಮತ್ತು B ಗಳ ನಡುವೆ ಇದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. $\overline{AC}$ ರೇಖಾಖಂಡದ ಉದ್ದವು m ಮೂಲ ಮಾನಗಳಾಗಿರಲಿ. ಮತ್ತು $\overline{CB}=n$ ಮೂಲ ಮಾನಗಳಾಗಿರಲಿ. ಈ ಎರಡು ಉದ್ದಗಳ ಪ್ರಮಾಣವು $m:n$ ಆಗಿರುವುದು. (m ಮತ್ತು n ಗಳು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳು). $\overline{AB}$ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು C ಯಲ್ಲಿ $m:n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಚಿತ್ರ 2.1

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $AC = 2.6$ Cms, ಮತ್ತು $CB = 3.9$ Cms ಆದರೆ $AC:CB = 2.6 : 3.9 = 2:3$ ಅಥವಾ $\frac{AC}{CB} = \frac{2}{3}$ ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

Now let D be a point on the extended line segment AB.

Fig. 2·2

We make a convention here that the length of the line segment measured in the direction $\overrightarrow{AB}$ is positive and measured in the opposite direction is negative.

Hence we write $AD : DB = m : -n$

$$\text{Or} \quad \frac{AD}{DB} = \frac{m}{-n} .$$

We say that D divides AB externally in the ratio $m : n$

Note that either the negative sign or the word externally is used.

For example if $AD = 12$ cms and $BD = 8$ cms then

$$\frac{AD}{DB} = \frac{12}{-8} = -\frac{3}{2} .$$

Theorem 2.1 :

Given a line segment there is exactly one point which divides it in a given ratio.

We have assumed that there exists a one-one correspondence between the points of a line and the set of all real numbers.

Let $\overline{AB}$ be the given segment. Let the co-ordinates of A and B be a and b respectively.
Let C be a point which divides it in the ratio $m : n$. Let the co-ordinate of C be x.

Fig. 2.3

ಈಗ D ಎಂಬುದು AB ರೇಖಾಖಂಡದ ವೃದ್ಧಿಸಿದ ಭಾಗದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು

ಚಿತ್ರ 2.2

ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ AB ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಅಳತೆ ಮಾಡುವ ಉದ್ದವನ್ನು ಧನವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಅಳತೆಮಾಡುವ ಉದ್ದವನ್ನು ಋಣವಾಗಿಯೂ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಆದ್ದರಿಂದ $AD:DB=m:-n$ ಅಥವಾ $\frac{AD}{DB}=\frac{m}{-n}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. D ಯು AB ಯನ್ನು $m:n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಬಾಹ್ಯ ವಿಭಾಗವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನಾಗಲೀ ಅಥವಾ ಬಾಹ್ಯವಿಭಾಗ ಎಂಬ ಪದವನ್ನಾಗಲೀ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $AD=12$ ಸೆಂ.ಮಿ. ಮತ್ತು $DB=8$ ಸೆಂ.ಮಿ.

ಆದರೆ, $\frac{AD}{DB} = \frac{12}{-8} = -\frac{3}{2}$ ಆಗಿರುವುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 2.1: ದತ್ತ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ದತ್ತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿರುವುದು.

ದತ್ತರೇಖೆಯ ಬಿಂದುಗಳಿಗೂ ಮತ್ತು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಕ್ಕೂ ಒಂದು–ಒಂದು ಸಹಗಮ್ಯತೆ ಇದೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ಈ ಹಿಂದೆಯೇ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

$\overline{AB}$ ಯು ದತ್ತ ರೇಖಾಖಂಡವಾಗಿರಲಿ. A ಮತ್ತು B ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ a ಮತ್ತು b ಇರಲಿ. C ಬಿಂದುವು $\overline{AB}$ ಯನ್ನು $m:n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಲಿ. C ಯ ನಿರ್ದೇಶಕವು x ಇರಲಿ.

ಚಿತ್ರ 2.3

then $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{m}{n}$ gives

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore x = \frac{an+bm}{m+n}.$$

Obviously only one such real number exists and the point corresponding to this real number divides $\overline{AB}$ in the ratio $m : n$.

Definition :

Three numbers a, b, c, are said to be in continued proportion if $a/b = b/c$. Then $b^2 = ac$ and b is said to be the mean proportional of a and c. C is called the third proportional of a and b.

Since the length of a line segments is a real number, similar statement holds good for line segments also.

If $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{EF}{GH}$ then we have

(i) $AB.GH = CD.EF$

(ii) $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{GH}{EF}$

(iii) $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{CD}{GH}$

(iv) $\dfrac{AB}{CD} + 1 = \dfrac{EF}{GH} + 1$ or

$$\frac{AB+CD}{CD} = \frac{EF+GH}{GH}$$

(v) $\dfrac{AB-CD}{CD} = \dfrac{EF-GH}{GH}$

(vi) $\dfrac{AB+CD}{AB-CD} = \dfrac{EF+GH}{EF-GH}$

ಈಗ $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{m}{n}$ ಆಗಿರಬೇಕಾದುದರಿಂದ,

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{m}{n} \text{ ಅಥವಾ } x = \frac{an+bm}{m+n}.$$

ಇಂತಹ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವುದೆಂಬುದು ಸುಸ್ಪಷ್ಟ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಹಗಾಮಿಯಾದ ಬಿಂದುವು $\overline{AB}$ ಯನ್ನು $m : n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುದು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : a, b, c ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$ ಆದರೆ, a, b, c ಗಳು ಸರಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಆಗ $b^2 = ac$ ಆಗಿರುವುದು. b ಗೆ a ಮತ್ತು c ಗಳ ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿ ಎಂದು ಹೆಸರು. c ಯು a ಮತ್ತು b ಗಳ ತೃತೀಯಾನುಪಾತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ರೇಖಾಖಂಡದ ಉದ್ದವು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದುದರಿಂದ, ಈ ಮೇಲಿನ ರೀತಿಯ ಉಕ್ತಿಗಳು ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ.

ಹೀಗೆ $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{EF}{GH}$ ಆದರೆ,

(i) $AB.\,GH = CD.\,EF$

(ii) $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{GH}{EF}$

(iii) $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{CD}{GH}$

(iv) $\dfrac{AB}{CD} + 1 = \dfrac{EF}{GH} + 1$ ಅಥವಾ

$$\frac{EF+GH}{GH} = \frac{AB+CD}{CD}$$

(v) $\dfrac{AB-CD}{CD} = \dfrac{EF-GH}{GH}$

(vi) $\dfrac{AB+CD}{AB-CD} = \dfrac{EF+GH}{EF-GH}$

Theorem 2.2 :

The areas of two triangles having equal altitudes are proportional to their bases.

We know that the area of a triangle $= \frac{1}{2}$ base $\times$ altitude

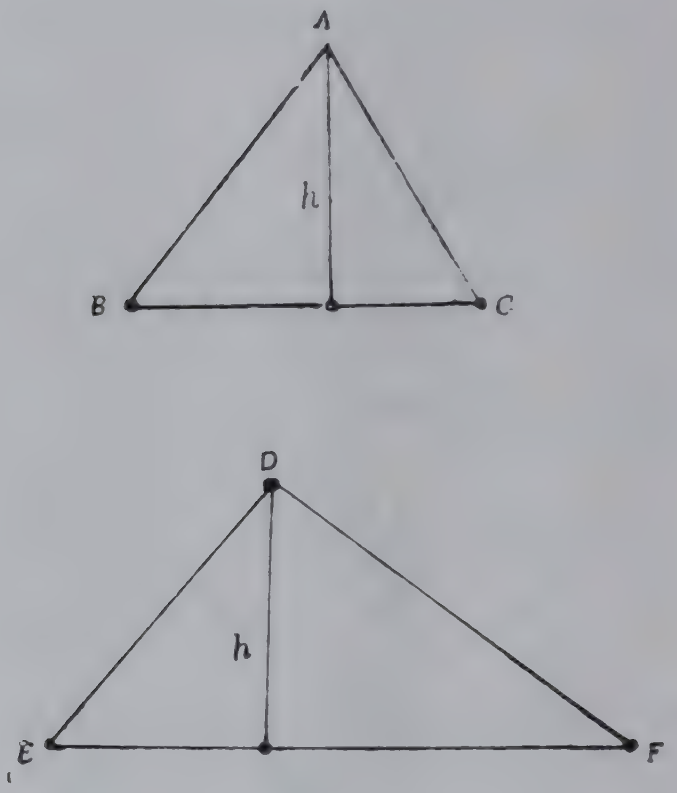


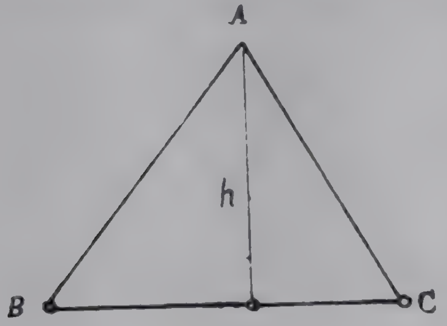
Fig. 2·4

$$\therefore \quad \frac{\text{Area of } \triangle ABC}{\text{Area of } \triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2}\, BC.h}{\frac{1}{2}\, EF.h} = \frac{BC}{EF}.$$

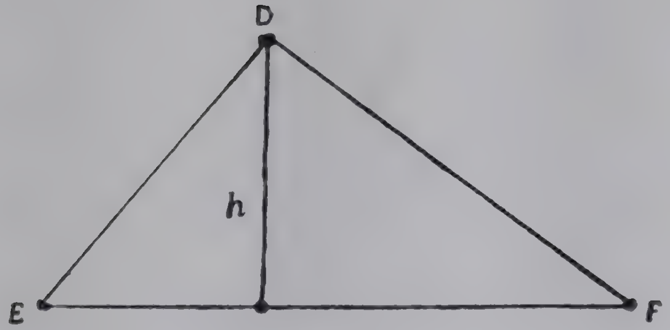
Similarly the areas of two triangles having equal bases are proportional to their altitudes and the areas of triangles having equal bases and equal altitudes are equal.

ಪ್ರಮೇಯ 2.2 : ಒಂದೇ ಎತ್ತರವಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ಅವುಗಳ ಪಾದಗಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= \frac{1}{2} \times$ ಪಾದ $\times$ ಎತ್ತರ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.



(*i*)



(*ii*)

ಚಿತ್ರ 2.4

$$\therefore \frac{\triangle\ ABC \text{ ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ}}{\triangle\ DEF \text{ ನ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ}} = \frac{\frac{1}{2}\ BC \cdot h}{\frac{1}{2}\ EF \cdot h} = \frac{BC}{EF}.$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಸಮವಾದ ಪಾದಗಳಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು, ಅವುಗಳ ಎತ್ತರಗಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿಯೂ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಪಾದಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ಸಮವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತವೆ.

Thorem 2.3 :

A straight line drawn parallel to one side of a triangle divides the other two sides proportionally.

Given : ABC is a triangle. Let XY be drawn parallel to BC, to meet AB and AC (produced if necessary) in X and Y.

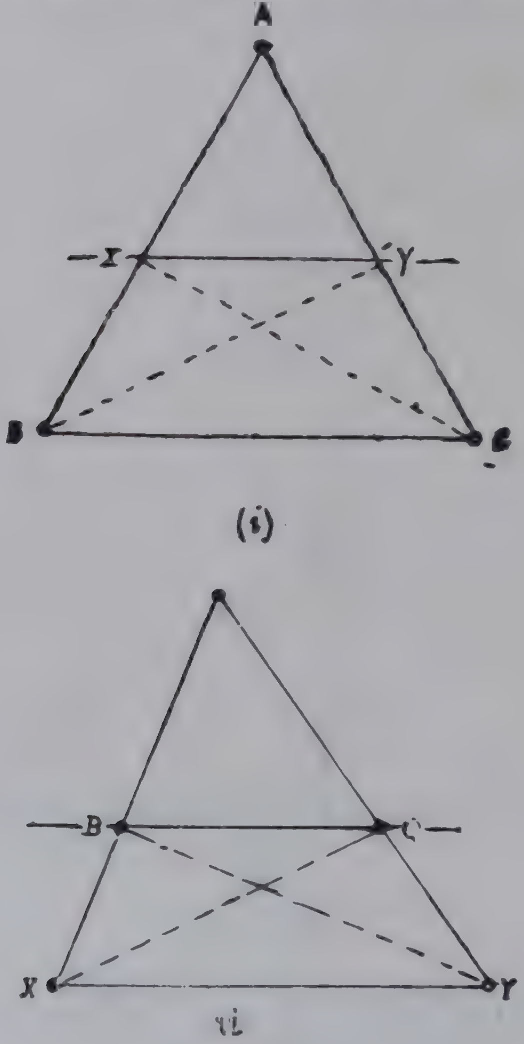


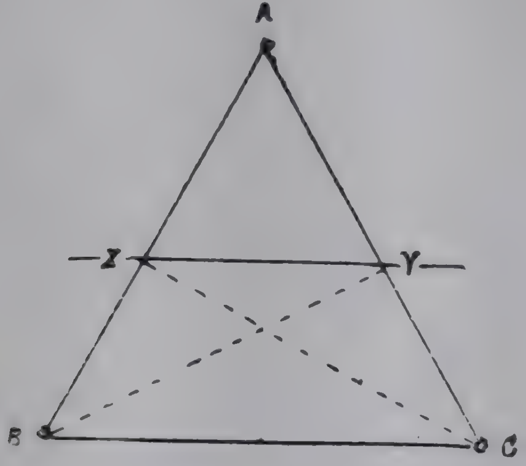
Fig 2.5

To Prove : $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$

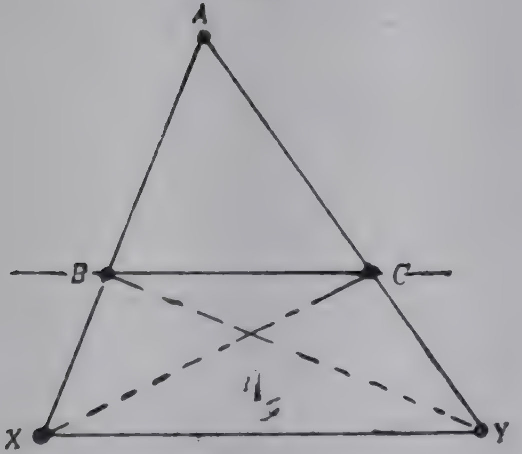
Construction : Join C, X and B, Y

ಪ್ರಮೇಯ 2.3 : ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ : ABC ಯು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ. XY ಎಂಬುದು BC ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದಿರುವ ರೇಖೆ. XY ರೇಖೆಯು AB ಯನ್ನು X ನಲ್ಲಿಯೂ AC ಯನ್ನು Y ನಲ್ಲಿಯೂ ಸಂಧಿಸುವುದು (ಅವಶ್ಯವಾದಲ್ಲಿ AB, AC ಗಳನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಮೇಲೆ)



(*i*)



ii

ಚಿತ್ರ 2.5

ಸಾಧನೀಯ : $\dfrac{AX}{XB} = \dfrac{AY}{YC}$

ರಚನೆ : C, X ಮತ್ತು B, Y ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ

Proof : By theorem 2.2,

$$\frac{\triangle AYX}{\triangle XYB} = \frac{AX}{XB} \text{ and } \frac{\triangle AXY}{\triangle CYX} = \frac{AY}{YC}$$

But $\triangle XYB = \triangle CYX$

(Since they stand on the same base between the same parallels)

$$\therefore \quad \frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$$

Cor :--By the properties of ratios we have

$$\frac{AX}{AB} = \frac{AY}{AC} \quad \text{and} \quad \frac{BX}{AB} = \frac{CY}{AC}$$

Theorem 2.4 (*Converse of theorem* 2.3) :

A line which divides two sides of a triangle proportionally is parallel to the third side.

Let a line l meet AB and AC at X and Y and let

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$$

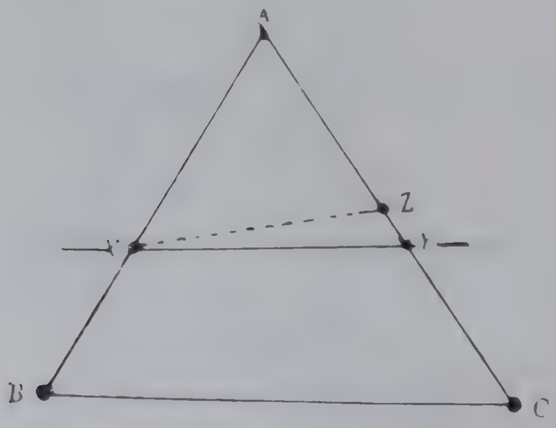


Fig. 2.6

ಸಾಧನೆ : ಪ್ರಮೇಯ 2.2 ರಿಂದ.

$$\frac{\triangle AYX}{\triangle XYB} = \frac{AX}{XB} \text{ ಮತ್ತು } \frac{\triangle AXY}{\triangle CYX} = \frac{AY}{YC}.$$

ಆದರೆ, $\triangle XYB = \triangle CYX$

(ಕಾರಣ ಅವು ಏಕಪಾದದ ಮೇಲೆ ಒಂದೇ ಜತೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ.)

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$

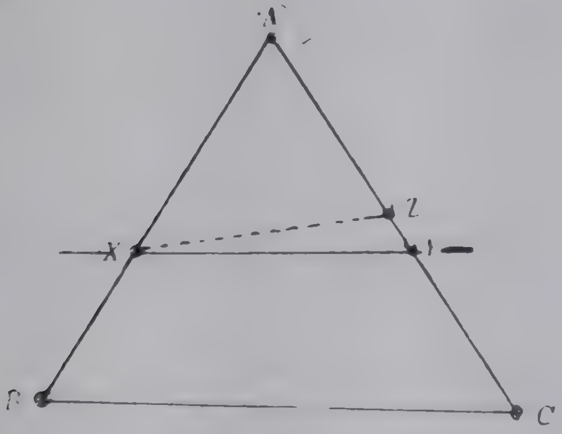
ಅನುಮಿತ : ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಗುಣದಿಂದಾಗಿ,

$$\frac{AX}{AB} = \frac{AY}{AC} \text{ ಮತ್ತು } \frac{BX}{AB} = \frac{CY}{AC} \text{ ಆಗಿರುವುದು.}$$

ಪ್ರಮೇಯ 2·4 : (ಪ್ರಮೇಯ 2·3ರ ವಿಲೋಮ).

ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದು.

l ರೇಖೆಯು AB ಮತ್ತು ACಗಳನ್ನು X ಮತ್ತು Y ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ ಮತ್ತು $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$ ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 2.6

To Prove :

$$XY \parallel BC$$

Proof : If XY is not parallel to BC, draw the line parallel to BC through X. Let it meet AC in Z

Now, by the above theorem,

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AZ}{ZC}$$

$$\therefore \text{ We have } \frac{AY}{YC} = \frac{AZ}{ZC}$$

But by theorem 2.1, there is only one point which divides a line segment in a given ratio.

Hence this is absurd.

$\therefore \quad XY \parallel BC$

Theorem **2.5 :**

The internal (external) bisector of the vertical angle of a triangle divides the base internally (externally) in the ratio of the sides containing the angle.

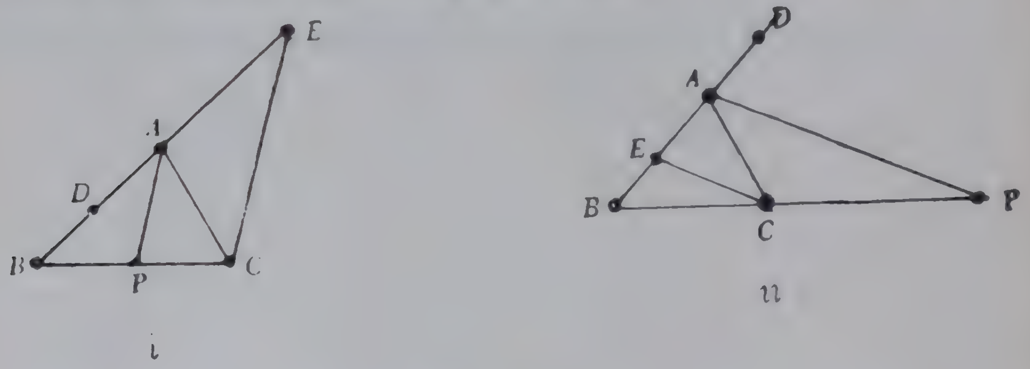


Fig. 2.7

Given : In the $\triangle ABC$, AP is the internal (external) bisector of $\angle A$

To Prove : $\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{AB}{AC}$

Construction : Draw $CE \parallel AP$ to meet AB (produced if necessary) at E.

ಸಾಧನೀಯ : $XY \parallel BC$.

ಸಾಧನೆ : XY ರೇಖೆಯು BC ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದಲ್ಲಿ, X ನ ಮೂಲಕ BCಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಇದು ACಯನ್ನು Zನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.

ಈಗ, ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ $\frac{AX}{XB} = \frac{AZ}{ZC}$

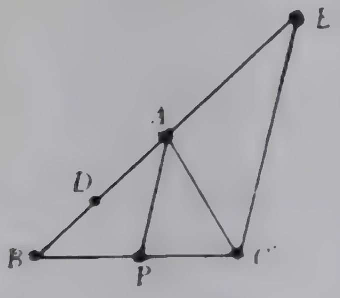
$$\therefore \frac{AY}{YC} = \frac{AZ}{ZC} \text{ ಆಗಿರುವುದು.}$$

ಆದರೆ ಪ್ರಮೇಯ 2.1ರಿಂದ, ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ದತ್ತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿರುವುದು.

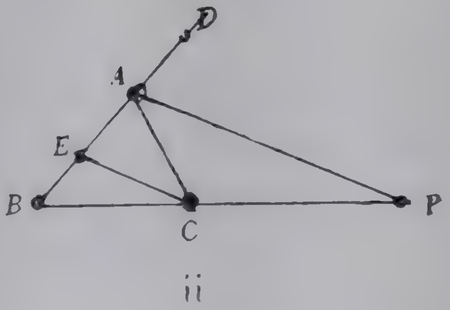
ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಅಸಂಗತ.

$$\therefore XY \parallel BC$$

ಪ್ರಮೇಯ 2·5 : ತ್ರಿಭುಜದ ಶೀರ್ಷ ಕೋನದ ಅಂತರೀಯ (ಬಾಹ್ಯ) ಕೋನಾರ್ಧಕವು ಪಾದವನ್ನು ಬಾಹುಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂತರೀಯ (ಬಾಹ್ಯ)ವಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುದು.



(i)



ii

ಚಿತ್ರ 2.7

ದತ್ತ : ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ AP ಯು $\angle A$ ಕೋನದ ಅಂತರೀಯ (ಬಾಹ್ಯ) ಸಮಭಾಜಕ.

ಸಾಧನೀಯ : $\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}$

ರಚನೆ : APಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ CE ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದು ABಯನ್ನು (ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ AB ವೃದ್ಧಿಸಿದ ಭಾಗವನ್ನು) Eನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.

Proof : Let D be a point in the segment BA in fig. (i) and in the segment BA produced in fig. (ii).

We have $\angle DAP = \angle PAC$

Since $AP \parallel CE$, $\angle DAP = \angle AEC$ (Corresp. angles) and $\angle PAC = \angle ACE$ (alt. angles)

But $\angle DAP = \angle PAC$ gives

$$\angle AEC = \angle ACE$$

$$\therefore \quad AE = AC$$

Now since $AP \parallel CE$,

$$\frac{BA}{AE} = \frac{BP}{PC} \text{ in either figure}$$

$$i.\,e.\ \frac{BA}{AC} = \frac{BP}{PC}$$

The converse of the above theorem is also true.

$$i.e. \text{ if } \frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC} \text{ then } AP \text{ bisects } \angle A$$

Proof : Taking the same figures and using the same construction as before,

$$\angle DAP = \angle AEC \quad \text{(Corresp. angles)}$$

$$\text{and } \angle PAC = \angle ACE \text{ (alt. angles)}$$

Also since $AP \parallel CE$, we have

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AE}$$

$$\text{But } \frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC} \text{ by hypothesis}$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AE} \qquad \therefore AE = AC$$

ಸಾಧನೆ:— Dಯು ಚಿತ್ರ (i) ರಲ್ಲಿ BA ರೇಖಾಖಂಡದಲ್ಲಿಯೂ ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ (ii) ರಲ್ಲಿ, ವೃದ್ಧಿಸಿದ BA ಖಂಡದಲ್ಲಿಯೂ ಇರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

$\angle DAP = \angle PAC$ ಆಗಿರುವುದು.

$AP \parallel CE$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $\angle DAP = \angle AEC$ (ಸಹಗಮ್ಯ ಕೋನಗಳು)

ಮತ್ತು $\angle PAC = \angle ACE$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು)

ಆದರೆ $\angle DAP = \angle PAC$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$\angle AEC = \angle ACE$ ಆಗಿರುವುದು.

$\therefore AE = AC$.

ಪುನಃ $AP \parallel CE$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಎರಡೂ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ,

$\frac{BA}{AE} = \frac{BP}{PC}$ ಆಗಿರುವುದು.

ಅಥವಾ $\frac{BA}{AC} = \frac{BP}{PC}$.

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವೂ ಸಹ ಸತ್ಯವಾಗಿರುವುದು.

ಅಂದರೆ, $\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}$ ಆದಾಗ,

APಯು $\angle A$ನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವುದು.

ಸಾಧನೆ :— ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನೂ ರಚನೆಯನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು,

ಪುನಃ $\angle DAP = \angle AEC$ (ಸಹಗಮ್ಯ ಕೋನಗಳು)

ಮತ್ತು $\angle PAC = \angle ACE$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು)

$AP \parallel CE$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AE}$$

ಆದರೆ $\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}$ (ದತ್ತಾಂಶ)

$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AE}$ $\quad \therefore AE = AC$

$\therefore \angle AEC = \angle ACE$

Hence we have $\angle DAP = \angle PAC$

Or AP bsiects $\angle A$

Theorem 2.6 :

Given base, the ratio of the sides of a triangle, the locus of the vertex is a circle.

Given: base $BC = a$ and $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{m}{n}$

To Prove: Locus of the vertex A is a circle.

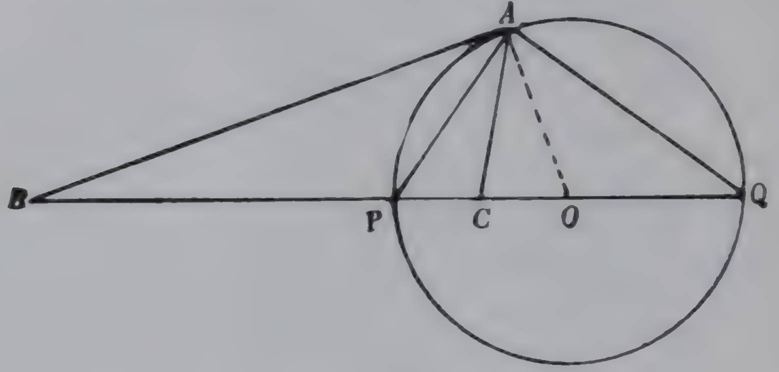


Fig. 2.8

Proof: Let P and Q divide BC internally and externally in the ratio $m : n$

Now let A be a point on the required locus

$$\text{Then } \frac{AB}{AC} = \frac{m}{n} \doteq \frac{BP}{PC} = \frac{BQ}{CQ}$$

Then AP and AQ bisect $\angle A$ internally and externally.

$\therefore \quad \angle PAQ = 90°$

$\therefore$ 'A' lies on the circle with PQ as diameter.

Conversely ;

Any point A on the circle with PQ as diameter satisfies the given condition. Let O be the centre of the circle.

$\therefore \quad \angle AEC = \angle ACE$

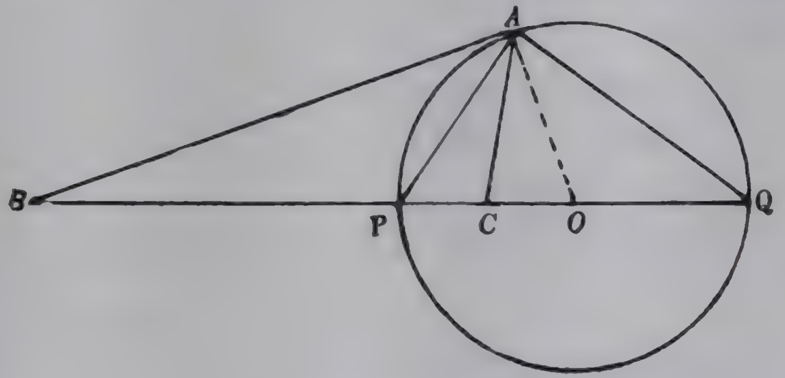
ಆದ್ದರಿಂದ $\angle DAP = \angle PAC$

ಅಥವಾ APಯು $\angle A$ ನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 2·6: ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ ಮತ್ತು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಶೀರ್ಷ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥವು ಒಂದು ವೃತ್ತವಾಗಿರುವುದು.

ದತ್ತ: ಪಾದ $BC = a$ ಮತ್ತು $\frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}$.

ಸಾಧನೀಯ: A ಶೀರ್ಷ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥವು ಒಂದು ವೃತ್ತವಾಗಿರುವುದು.



ಚಿತ್ರ 2.8

ಸಾಧನೆ: P ಮತ್ತು Qಗಳು BC ಯನ್ನು $m:n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ವಿಭಾಜಿಸಲಿ.

ಬೇಕಾಗಿರುವ ಪಥದಲ್ಲಿ Aಯು ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ $\frac{AB}{AC} = \frac{m}{n} = \frac{BP}{PC} = \frac{BQ}{CQ}$

ಆದ್ದರಿಂದ AP ಮತ್ತು AQ ಗಳು $\angle A$ ಕೋನವನ್ನು ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ.

$\therefore \quad \angle PAQ = 90^\circ$.

ಆದ್ದರಿಂದ Aಯು PQ ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವುದು.

ವಿಲೋಮವಾಗಿ, PQ ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವು ದತ್ತ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದು. (O ಎಂಬುದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಲಿ.)

$$\text{Since } \frac{BP}{PC} = \frac{BQ}{CQ},$$

$$\text{we have } \frac{BQ}{BP} = \frac{CQ}{PC}$$

$$\text{and } \frac{BQ+BP}{BQ-BP} = \frac{CQ+PC}{CQ-PC}$$

Now $BQ+BP=BP+PQ+BP=2BP+2PO=2BO$
and $BQ-BP=PQ=2PO$

Also $CQ+PC=PQ=2PO$ and
$CQ-PC=(CO+OQ)-(PO-CO)=2\,CO$ (since $PO=OQ$)
Hence we have,

$$\frac{2OB}{2OP} = \frac{2OP}{2OC}$$

Or $OC.OB=OP^2=OA^2$

$\therefore$ OA is a tangent to the circle passing through A, B, C.

$\therefore$ $\angle OAC = \angle OBA$

Or $\angle OAP - \angle PAC = \angle OPA - \angle BAP = \angle OAP - \angle BAP$

$\therefore$ $\angle BAP = \angle PAC$. *i.e.*, AP bisects $\angle A$ internally

$$\therefore \quad \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{PC} = \frac{m}{n}.$$

Therefore the locus of A is a circle with PQ as diameter. This circle is called the "Apollonius' Circle."

Exercises 2.1

1 A segment AB is 3.5 inches long. A point X divides AB in the ratio 3 : 2. Find the lengths of segments AX and XB. Verify the calculation by construction.

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BQ}{QC} \text{ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, } \frac{BQ}{BP} = \frac{CQ}{PC}$$

ಮತ್ತು $\dfrac{BQ + BP}{BQ - BP} = \dfrac{CQ + PC}{CQ - PC}$

ಈಗ $BQ + BP = BP + PQ + BP = 2\ BP + 2\ PO$
$= 2\ BO$

$BQ - BP = PQ = 2\ PO.$

ಮತ್ತು $CQ + PC = PQ = 2\ PO$

$CQ - PC = (CO + OQ) - (PO - CO) = 2\ CO$
(ಕಾರಣ, $PO = OQ$)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\dfrac{2\ OB}{2\ OP} = \dfrac{2\ OP}{2\ OC}$

ಅಥವಾ $OC.OB = OP^2 = OA^2$

ಆದ್ದರಿಂದ A, B, ಮತ್ತು Cಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ OA ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಿರುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle OAC = \angle OBA$
ಅಥವಾ $\angle OAP - \angle PAC = \angle OPA - \angle BAP =$
$\angle OAP - \angle BAP$

$\therefore\ \angle BAP = \angle PAC$ ಅಥವಾ APಯು $\angle A$ಕೋನದ ಅಂತರೀಯ ಕೋನಾರ್ಧಕ.

$$\therefore\ \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{PC} = \frac{m}{n}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ A ಬಿಂದುವಿನ ಪಥವು, PQ ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತವಾಗಿರುವುದು.
ಈ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ 'ಅಪೊಲೋನಿಯಸ್ ವೃತ್ತ' ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 2.1

1 AB ರೇಖಾ ಖಂಡವು 3.5 ಅಂಗುಲ ಉದ್ದವಿದೆ. X ಬಿಂದುವು AB ಯನ್ನು 3:2 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುದು. AX ಮತ್ತು XB ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನು ರಚನೆಯಿಂದ ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

2 ABC and DBC are two traingles having altitudes AX and DY in the ratio 5 : 3. Find the ratio of their areas.

3 $ABCD$ is a parallelogram and P is a point on the diagonal BD such that $BP : PD = 1 : 3$. Prove that $\triangle APD = \frac{3}{8}$ parallelogram $ABCD$.

4 $ABCD$ is a trapezium in which $AB \parallel CD$. Prove that the line joining the middle points of BC and AD is parallel to AB.

5 $ABCD$ is a trapezium in which $AB \parallel CD$. The diagonals AC and BD meet in E.

Prove that $AE : EC = BE : ED$.

6 The side AB of a $\triangle ABC$ is cut at D in the ratio 5 : 3. If DF drawn parallel to AC, cuts BC at F, find the ratio of the segments of BC.

7 If AP bisects $\angle A$ of triangle ABC show that

$$BP = \frac{ac}{b+c} \text{ and } CP = \frac{ab}{b+c}.$$

If the bisector of $\angle B$ meets AP in I, calculate $AI : IP$.

8 The bisector of $\angle A$ of $\triangle ABC$ meets BC at D and DE is drawn parrallel to BC to cut AC at E and DF is drawn parallel to AC to cut AB at F. Show that

$$BF : CE = AB^2 : AC^2.$$

9 If the bisectors of angles A and C of a quadrilateral $ABCD$ meet on the diagonal AB, Show that the bisectors of angles B and D meet on AC.

10 $ABCD$ is a quadrilateral having $AB = AD$. The angles $\angle BAC$ and $\angle CAD$ are bisected by lines which meet BC and CD in E and F respectively. Prove that EF is parallel to BD.

2 ABC ಮತ್ತು DBC ಗಳು BC ಪಾದದ ಮೇಲಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜ ಗಳು. AX ಮತ್ತು DY ಗಳು BC ಗೆ ಎಳೆದಿರುವ ಲಂಬಗಳು $5:3$ ಪ್ರಮಾಣ ದಲ್ಲಿವೆ. ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3 $ABCD$ಯು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ. $BP : PD = 1:3$ ಆಗುವಂತೆ BD ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ P ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿದೆ.

$\triangle APD = \frac{3}{8}$ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ $ABCD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4 $ABCD$ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ $AB \parallel CD$. BC ಮತ್ತು ADಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯು ABಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5 $ABCD$ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ $AB \parallel CD$. AC ಮತ್ತು BD ಕರ್ಣಗಳು E ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. $AE : EC = BE : ED$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6 ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ AB ಬಾಹುವನ್ನು Dಯಲ್ಲಿ $5:3$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದೆ. ABಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ DF ರೇಖೆಯು BCಯನ್ನು F ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು. BCಯ ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

7 ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ AP ಯು $\angle A$ ನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವುದು. $BP = \dfrac{ac}{b+c}$ ಮತ್ತು $CP = \dfrac{ab}{b+c}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. $\angle B$ ಕೋನದ ಅರ್ಧಕ ರೇಖೆಯು APಯನ್ನು Iನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಿದರೆ, $AI : IP$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುರಿ.

8 ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\angle A$ ಕೋನದ ಅರ್ಧಕ ರೇಖೆಯು BCಯನ್ನು D ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು. AB ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ DE ಸರಳರೇಖೆಯು AC ಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು. AC ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ DF ಸರಳರೇಖೆಯು AB ಯನ್ನು F ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು.

$BF : CE = AB^2 : AC^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ!

9 $ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು BD ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ ಸಂಧಿಸಿದರೆ, $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle D$ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು AC ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆಯೇ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10 $ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ $AB = AD$. $\angle BAC$ ಮತ್ತು $\angle CAD$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು BC ಮತ್ತು CD ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ E ಮತ್ತು F ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. $EF \parallel BD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

11 AD is the median of a $\triangle ABC$ meeting BC in D. The angles $\angle ADB$ and $\angle ADC$ are bisected by lines which meet AB and AC in E and F respectively. Prove that EF is parallel to BC.

12 P is a point on the side BC of $\triangle ABC$. The angle APB is bisected by the line DPE meeting the other sides AB, AC, (produced if necessary) in D and E respectively.

Prove that $BP.\ CE.\ AD = PC.\ EA.\ DB.$

11 ABC ತ್ರಿಭುಜದ AD ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು BC ಯನ್ನು D ಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. $\angle ADB$ ಮತ್ತು $\angle ADC$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು AB ಮತ್ತು AC ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ E ಮತ್ತು F ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. $EF \parallel BC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12 ABC ತ್ರಿಭುಜದ BC ಪಾದದಲ್ಲಿ P ಬಿಂದುವೊಂದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. DPE ರೇಖೆಯು $\angle APB$ ನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು AB, AC ಗಳನ್ನು (ಅವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ) ಕ್ರಮವಾಗಿ D ಮತ್ತು E ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. $BP.CE.AD = PC.EA.DB$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

CHAPTER 3

Similar Triangles

Two polygons are said to be similar if (i) corresponding sides are proportional *and* (ii) corresponding angles are equal.

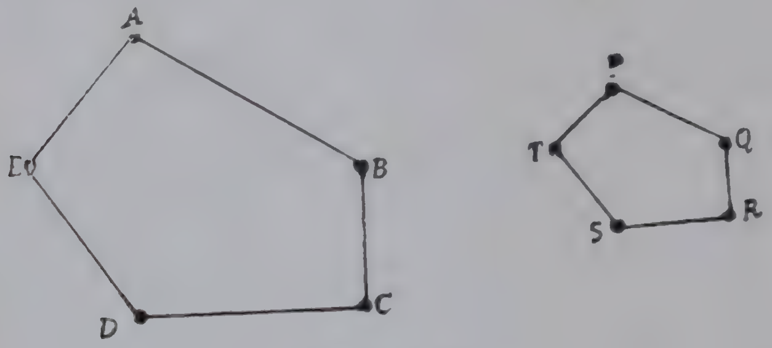


Fig. 3·1

If the two figures here are similar then,

$$\angle A = \angle P, \quad \angle B = \angle Q \text{ .... etc.}$$

$$\text{and } \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \text{ .... etc.}$$

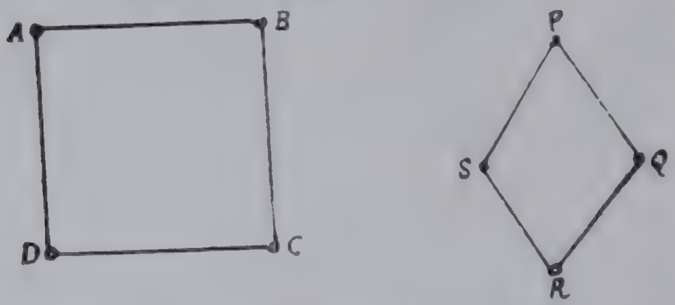


Fig. 3.2

A square and a rhombus have their sides proportional but they are not similar.

ಅಧ್ಯಾಯ 3

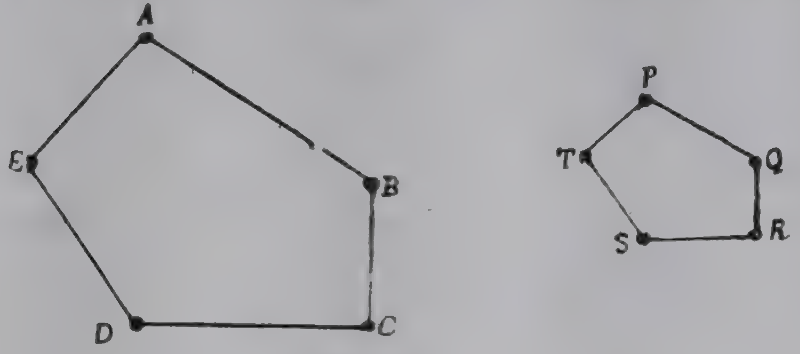
ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು

ಎರಡು ಬಹುಭುಜಗಳಲ್ಲಿ

(i) ಸಹಗಮ್ಯ ಬಾಹುಗಳು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿಯೂ ಮತ್ತು

(ii) ಸಹಗಮ್ಯ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿಯೂ

ಇದ್ದರೆ, ಅಂತಹ ಬಹುಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮರೂಪ ಬಹುಭುಜಗಳೆಂದು ಹೆಸರು.

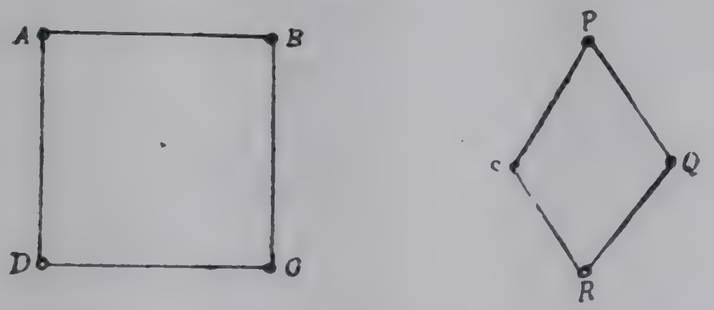


ಚಿತ್ರ 3.1

ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿದ ಲ್ಲಿ,

$\angle A = \angle P, \ \angle B = \angle Q$ .... ಇತ್ಯಾದಿ

ಮತ್ತು $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CD}{RS} =$ .... ಇತ್ಯಾದಿ



ಚಿತ್ರ 3.2

ಒಂದು ಚಚ್ಚೌಕದ ಮತ್ತು ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಬಾಹುಗಳು ಅನುಪಾತ ದಲ್ಲಿದ್ದರೂ ಅವುಗಳು ಸಮರೂಪತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ಹೀಗೆಯೇ ಒಂದು ಆಯದ

A rectangle and a square have their corresponding angles equal, but they are not similar.

Fig. 3.3

However, in the case of triangles, we prove below (Theorems 3.1 and 3.2) that one of the conditions (i) or (ii) implies the other: So, two triangles will be similar either (i) if they are equiangular or (ii) if the sides are proportional.

Theorem 3.1 :

If two triangles are equiangular then the corresponding sides are proportional.

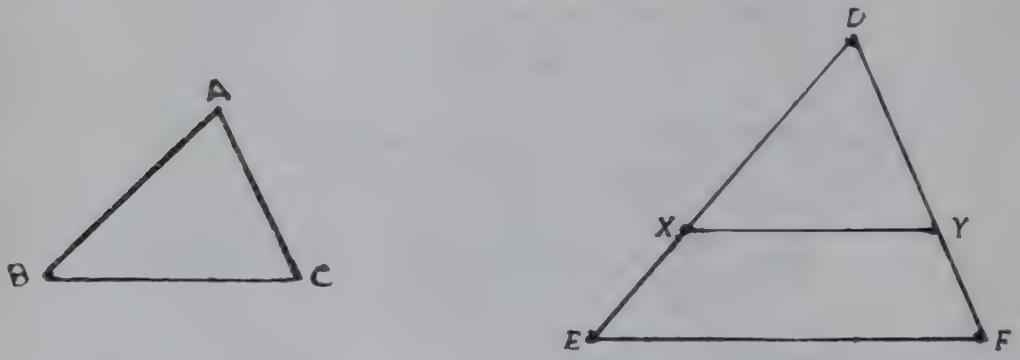


Fig. 3.4

Given : In triangles ABC and DEF

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ and $\angle C = \angle F$

To prove :

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

Construction : Along DE, take $DX = AB$ and along DF take $DY = AC$. Join XY.

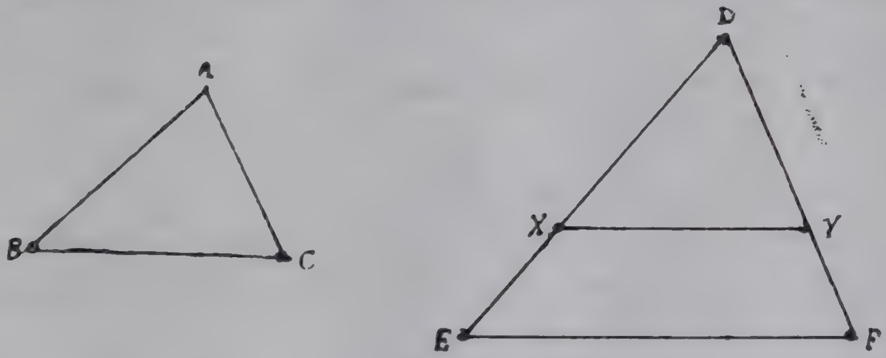
ಮತ್ತು ಒಂದು ಚಚ್ಚೌಕದ ಸಹಗಮ್ಯ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೂ, ಅವುಗಳು ಸಮರೂಪತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ.

ಚಿತ್ರ 3.

ಆದರೆ, ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಎರಡೂ ನಿಯಮಗಳ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಯಾವುದೇ ಒಂದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಸಹ ಮತ್ತೊಂದನ್ನು ಸಾಧಿಸ ಬಹುದೆಂದು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಪ್ರಮೇಯಗಳಲ್ಲಿ (ಪ್ರ. 3.1, 3.2) ಸಾಧಿಸಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತೊಂದರ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೂ ಅಥವಾ ಅನುಗಮ್ಯ ಬಾಹುಗಳು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೂ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪತೆ ಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುವು.

ಪ್ರಮೇಯ 3.1 :

ಸಮಾನ ಕೋನಗಳಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಅನುಪಾತ ದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 3.4

ದತ್ತ: ABC ಮತ್ತು DEF ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ ಮತ್ತು $\angle C = \angle F$

ಸಾಧನೀಯ : $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$

ರಚನೆ: DE ಯಲ್ಲಿ $DX = AB$ ಆಗುವಂತೆ X ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಮತ್ತು DF ನಲ್ಲಿ $DY = AC$ ಆಗುವಂತೆ Y ಬಿಂದುವನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು XY ಸೇರಿಸಿ.

Proof :

In triangles ABC and DXY, $AB = DX$, $AC = DY$ and $\angle BAC = \angle XDY$ (given).

$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle DXY$.

$\therefore \angle DXY = \angle ABC = \angle DEF$

$\therefore XY \parallel EF$.

$$\therefore \frac{DX}{DE} = \frac{DY}{DF}$$

$$i.e. \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

$$\text{Similarly } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}.$$

Theorem : 3·2

If two triangles have the three sides of one proportional to the three sides of the other, the triangles are equiangular.

Given : In triangles ABC and DEF (Fig. 3·4)

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

To prove : $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ and $\angle C = \angle F$

Construction : Along DE take $DX = AB$ and aonlg DF take $DY = AC$. Join XY.

Proof : By data $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

$$\because \frac{DX}{DE} = \frac{DY}{DF} \quad (\because AB = DX \text{ and } AC = DY)$$

$\therefore XY$ is parallel to EF.

$\therefore$ triangles DXY and DEF are equiangular.

$$\therefore \frac{XY}{EF} = \frac{DX}{DE} = \frac{DY}{DF} = \frac{BC}{EF} \text{ by data.}$$

$\therefore XY = BC$.

ಸಾಧನೆ: ABC ಮತ್ತು DXY ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ

$AB = DX$, $AC = DY$ ಮತ್ತು $\angle BAC = \angle XDY$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DXY$

$\therefore \angle DXY = \angle ABC = \angle DEF$

ಆದ್ದರಿಂದ, $XY \parallel EF$

$$\therefore \frac{DX}{DE} = \frac{DY}{DF}$$

ಅಥವಾ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$

ಹೀಗೆಯೇ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}.$$

ಪ್ರಮೇಯ 3·2:

ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವ ಬಾಹುಗಳಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮಾನ ಕೋನಗಳನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ: ABC ಮತ್ತು DEF ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$

(ಚಿತ್ರ 3.4)

ಸಾಧನೀಯ: $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ ಮತ್ತು $\angle C = \angle F$.

ರಚನೆ: DEಮೇಲೆ $DX = AB$ ಆಗುವಂತೆ X ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಮತ್ತು DF ಮೇಲೆ $DY = AC$ ಆಗುವಂತೆ Y ಬಿಂದುವನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು XY ಸೇರಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ: $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ (ದತ್ತ)

$\therefore \dfrac{DX}{DE} = \dfrac{DY}{DF}$ ($\because AB = DX$ ಮತ್ತು $AC = DY$)

$\therefore$ XY ರೇಖೆಯು EFಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ.

$\therefore$ DXY ಮತ್ತು DEF ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮಾನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

$\therefore \dfrac{XY}{EF} = \dfrac{DX}{DE} = \dfrac{DY}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ (ದತ್ತ)

$\therefore XY = BC$.

Now in triangles ABC and DXY, $AB=DX$, $AC=DY$ and $BC=XY$.

$\therefore$ the triangles are congruent. But triangles DXY and DEF are equiangular.

$\therefore$ triangles ABC and DEF are equiangular.

i.e. $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$ and $\angle C=\angle F$.

Theorem 3.3 :

If two triangles have one angle of one equal to one angle of the other and the sides about them proportional, the triangles are similar.

Given : In triangles ABC and DEF,

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF} \text{ and } \angle A=\angle D$$

To prove : triangles ABC and DEF are similar.

Construction : Along DE take $DX=AB$ and along DF take $DY=AC$. Join XY.

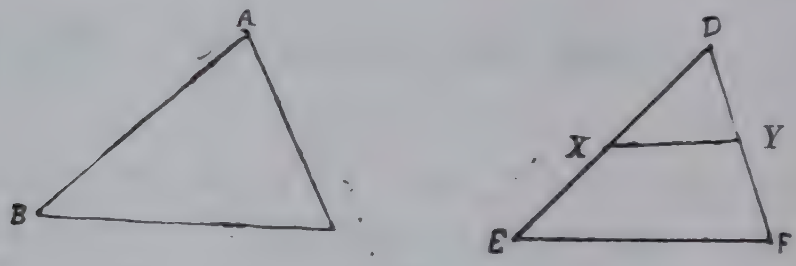


Fig. 3 5

Proof : Again traingles ABC and DXY are congruent.

$\therefore \angle B=\angle DXY$ and $\angle C=\angle DYX$

Also by data $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DF}$

$$\therefore \frac{DX}{DE}=\frac{DY}{DF}$$

$\therefore$ XY is parallel to EF

$\therefore \angle DXY=\angle E$ and $\angle DYX=\angle F$

$\therefore \angle B=\angle E$ and $\angle C=\angle F$

ಈಗ ABC ಮತ್ತು DXY ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ

$AB = DX$, $AC = DY$ ಮತ್ತು $BC = XY$

∴ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಎಲ್ಲಾ ವಿಧದಲ್ಲಿಯೂ ಸಮವಾಗಿವೆ.

ಆದರೆ DXY ಮತ್ತು DEF ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮಾನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

∴ ABC ಮತು DEF ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮಾನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

ಅಥವಾ, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ ಮತ್ತು $\angle C = \angle F$

ಪ್ರಮೇಯ 3·3:

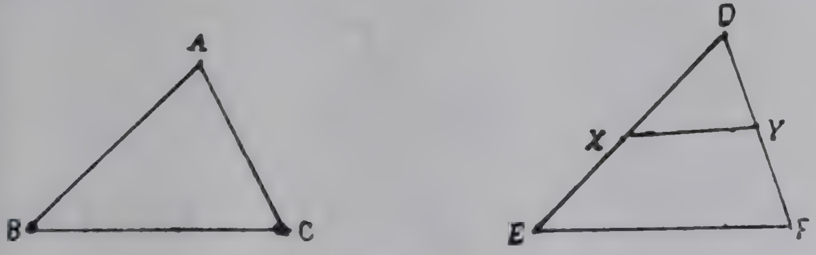
ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಒಂದು ಕೋನವು ಮತ್ತೊಂದರ ಒಂದು ಕೋನಕ್ಕೆ ವಾಗಿದ್ದು, ಈ ಕೋನಗಳ ಬಾಹುಗಳು ಅನುಪಾತ ದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ: ABC ಮತ್ತು DEF ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$ ಮತ್ತು $\angle A = \angle D$

ಸಾಧನೀಯ: ABC ಮತ್ತು DEF ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ರಚನೆ: DE ಮೇಲೆ $DX = AB$ ಆಗುವಂತೆ X ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಮತ್ತು F ಮೇಲೆ $DY = AC$ ಆಗುವಂತೆ Y ಬಿಂದುವನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು XY ಸಿ.



ಚಿತ್ರ 3·5

ಸಾಧನೆ: ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯುಗಳಂತೆಯೇ ABC ಮತ್ತು DXY ತ್ರಿಭುಜ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆ.

∴ $\angle B = \angle DXY$ ಮತ್ತು $\angle C = \angle DYX$, ಮತ್ತು ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

$$\therefore \frac{DX}{ED} = \frac{DY}{DF}$$

∴ XY ರೇಖೆಯು EFಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದು.

∴ $\angle B = \angle E$ ಮತ್ತು $\angle C = \angle F$

Therefore the two triangles are equiangular and he similar.

Theorem 3.4:

3.4 If two triangles have two sides of one proportic to two sides of the other, and the angles opposite to one of corresponding sides are equal, then the angles oppo to the other pair are either equal or supplimentary. the former case the triangles are similar.

(This is called the ambiguous case for the similarlity of two triangles.)

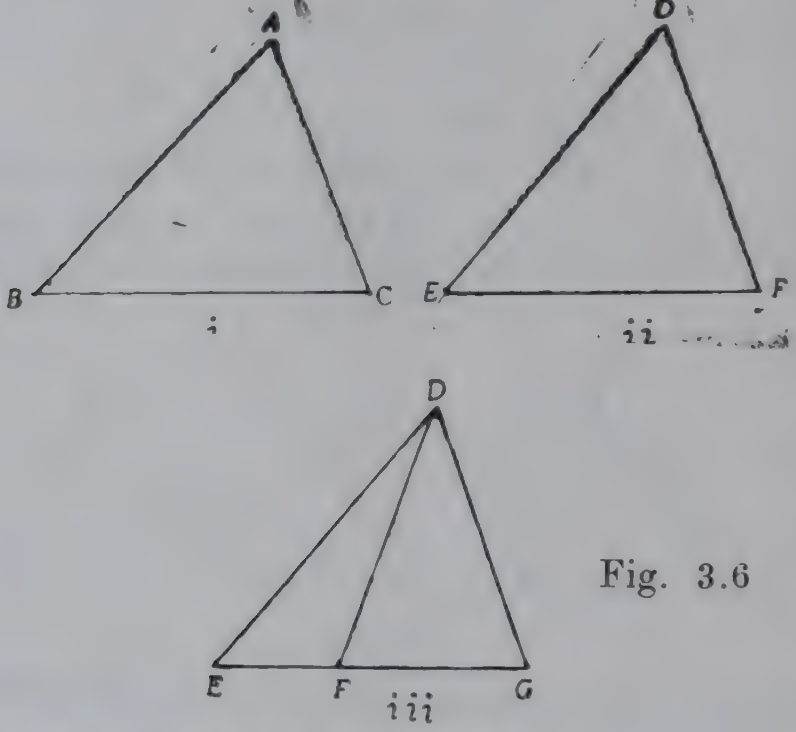


Fig. 3.6

Given : In triangles ABC and DEF

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \text{ and } \angle B = \angle E.$$

To prove : either $\angle C = \angle F$ or $\angle C + \angle F = 180°$.

Proof : The angles $\angle BAC$ and $\angle EDF$ are either e or unequal.

Case (i) Suppose $\angle BAC = \angle EDF$ as in figures (i) and

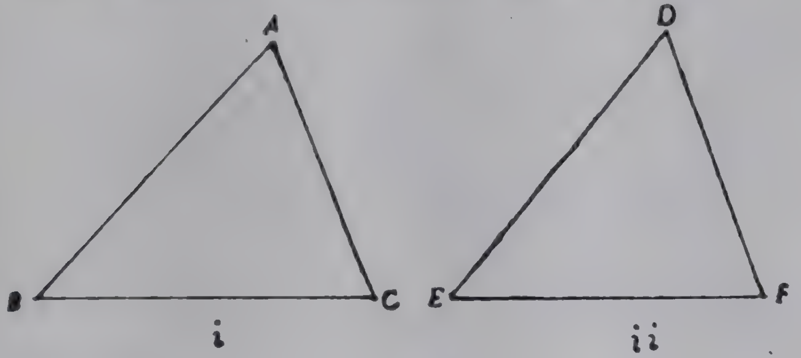
Also since $\angle B = \angle E$, we have $\angle C = \angle F$ and the triangles are similar.

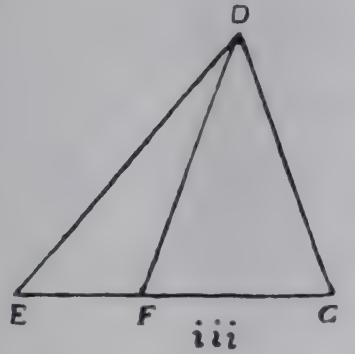
ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳೂ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ ಅವು ಸರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 3·4:

ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತೊಂದರ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳೊಡನೆ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುಗಮ್ಯ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಎದುರಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತೊಂದು ಜೊತೆ ಅನುಗಮ್ಯ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವುವು, ಇಲ್ಲವೇ ಸರಳಕೋನಪೂರಕಗಳಾಗಿರುವುವು. ಮೊದಲ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿರುವುವು.

(ಇವನ್ನು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ ಸಂದಿಗ್ಧ ಪಕ್ಷ ಎನ್ನುವರು)





ಚಿತ್ರ 3.6

ದತ್ತ : ABC ಮತ್ತು DFE ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$

ಮತ್ತು $\angle B = \angle E$

ಸಾಧನೀಯ : $\angle C = \angle F$ ಅಥವಾ $\angle C + \angle F = 180°$

ಸಾಧನೆ :— $\angle BAC$ ಮತ್ತು $\angle EDF$ ಗಳು ಸಮ ಇಲ್ಲವೇ ಅಸಮ

ಪಕ್ಷ (i) ಚಿತ್ರ (i) ಮತ್ತು (ii) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ

$\angle BAC = \angle EDF$ ಆಗಿರಲಿ

ಈಗ $\angle B = \angle E$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $\angle C = \angle F$ ಆಗಿರುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳೂ ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

Case (ii) If $\angle BAC \neq \angle EDF$ as in figures (i) and construct $\angle EDG = \angle BAC$ and let DG meet EF prod… at G.

Now $\triangle$les BAC and EDG are equiangular.

$$\therefore \angle ACB = \angle DGF \text{ and } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DG}$$

$$\text{But } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \text{ (by data)}$$

$$\therefore DG = DF$$

$$\therefore \angle DFG = \angle DGF = \angle ACB$$

$$\text{But } \angle DFE + \angle DFG = 180^\circ$$

$$\therefore \angle DFE + \angle ACB = 180^\circ$$

$$\text{or } \angle C + \angle F = 180^\circ.$$

Theorem 3.5 :

Areas of two similar triangles are proportional to squares on the corresponding sides.

Given : ABC and DEF are two similar triangles.

To prove : $$\frac{\text{Area } \triangle ABC}{\text{Area } \triangle DEF} = \frac{AB^2}{DE^2}$$

Construction : Draw AX and and DY perpendicu to BC and EF respectively.

Fig. 3.7

ಪಕ್ಷ (ii) : ಚಿತ್ರ (i) ಮತ್ತು (iii) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ

$\angle BAC \neq \angle EDF$ ಆಗಿರಲಿ

ಈಗ $\angle EDG = \angle BAC$ ಆಗಿರುವಂತೆ DG ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಇದು ವೃದ್ಧಿಸಿದ EF ನ್ನು G ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.

ಈಗ BAC ಮತ್ತು EDG ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮಾನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

$$\therefore \angle ACB = \angle DGF \text{ ಮತ್ತು } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DG}$$

$$\text{ಆದರೆ, } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

$$\therefore \frac{AC}{DG} = \frac{AC}{DF}$$

$$\therefore DG = DF$$

$$\text{ಇದರಿಂದ } \angle DFG = \angle DGF = \angle ACB$$

$$\text{ಆದರೆ, } \angle DFE + \angle DFG = 180°$$

$$\therefore \angle DFE + \angle ACB = 180° \text{ ಅಥವಾ } \angle C + \angle F = 180°.$$

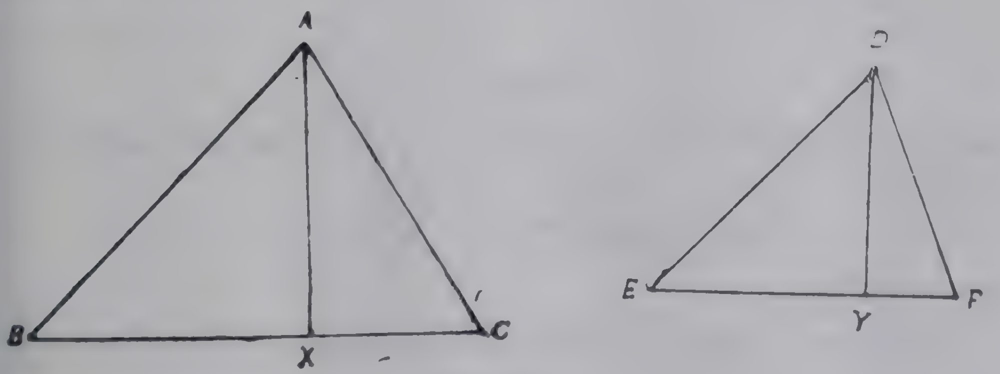
ಪ್ರಮೇಯ 3·5 :

ಸಮರೂಪವಾಗಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ಸಹಗಮ್ಯ ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ: ABC ಮತ್ತು DEF ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು

ಸಾಧನೀಯ : $$\frac{ABC \text{ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲ}}{DEF \text{ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲ}} = \frac{AB^2}{DE^2}$$

ರಚನೆ :—AX ಮತ್ತು DY ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ BC ಮತ್ತು EF ಗಳಿಗೆ ಲಂಬಗಳಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 3.7

Proof : In triangles ABX and DEY, $\angle B = \angle E$ and $\angle AXB = \angle DYE = 90°$.

Hence the remaining angles are also equal and the two triangles are similar.

$$\therefore \quad \frac{AX}{DY} = \frac{AB}{DE}$$

$$\text{Now } \frac{\text{Area } \triangle ABC}{\text{Area } \triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2}\, BC.AX}{\frac{1}{2}\, EF.DY}$$

$$= \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AB}{DE} = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{AB}{DE} = \frac{AB^2}{DE^2}$$

Also Since $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$ we have ,

$$\frac{\text{Area } \triangle ABC}{\text{Area } \triangle DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2} .$$

Theorem 3.6 :

Areas of two similar polygons are proportional to the squares on the corresponding sides.

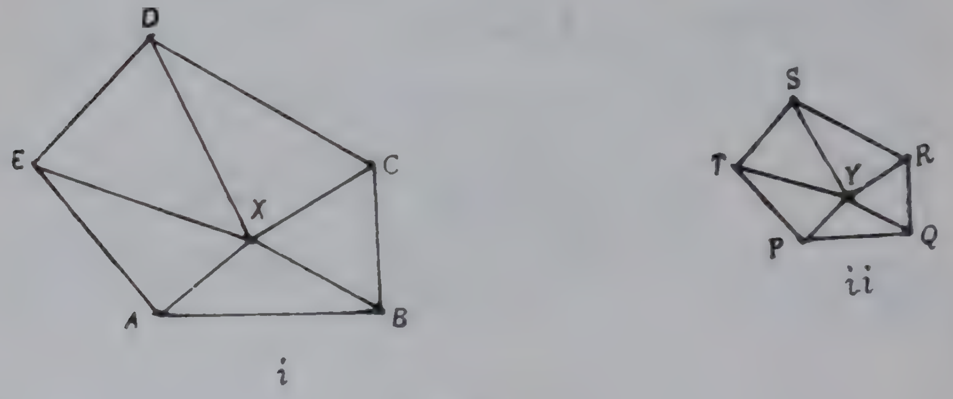


Fig. 3.8

Data : $ABCDE$ and $PQRST$ are two similar polygons

To Prove : $\dfrac{\text{Area } ABCDE}{\text{Area } PQRST} = \dfrac{AB^2}{PQ^2}$

Construction :

Take any point X inside the polygon $ABCDE$ and join it to its vertices.

ಸಾಧನೆ : ABX ಮತ್ತು DEY ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ $\angle B = \angle E$ ಮತ್ತು $\angle AXB = \angle DYE = 90°$. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$$\therefore \quad \frac{AX}{DY} = \frac{AB}{DE}$$

$$\text{ಈಗ } \frac{ABC \text{ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ}}{DEF \text{ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ}} = \frac{\frac{1}{2}\, BC \cdot AX}{\frac{1}{2}\, EF \cdot DY}$$

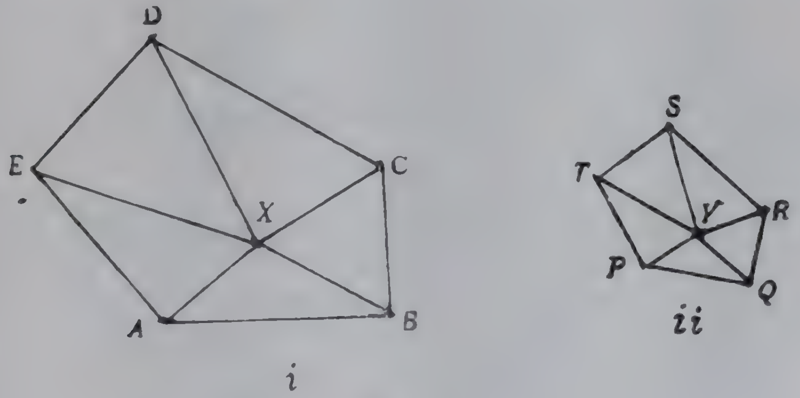
$$= \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AB}{DE} = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{AB}{DE} = \frac{AB^2}{DE^2}$$

$$\text{ಅಲ್ಲದೆ, } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \text{ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ}$$

$$\frac{ABC \text{ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ}}{DEF \text{ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ}} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2}.$$

ಪ್ರಮೇಯ 3·6 :

ಎರಡು ಸಮರೂಪ ಬಹುಭುಜಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ಸಹಗಮ್ಯ ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 3.8

ದತ್ತ: $ABCDE$ ಮತ್ತು $PQRST$ ಎರಡು ಸಮರೂಪ ಬಹುಭುಜಗಳು

ಸಾಧನೀಯ: $\dfrac{\text{ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ } ABCDE}{\text{ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ } PQRS} = \dfrac{AB^2}{PQ^2T}$

ರಚನೆ: $ABCDE$ ಬಹುಭುಜದಲ್ಲಿ X ಬಿಂದುವೊಂದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಅದನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳಿಗೂ ಸೇರಿಸಿ.

Con truct $\angle YPQ = \angle XAB$ and $\angle YQP = XBA$. Let PY and QY meet at Y. Join YR, YS and YT.

Proof :

Triangles XAB and YPQ are equiangular and hence similar.

$$\therefore \quad \frac{\text{Area } \triangle XAB}{\text{Area } \triangle YPQ} = \frac{AB^2}{PQ^2}$$

Now $\angle ABC = \angle PQR$ (Since the polygons are similar)
and $\angle ABX = \angle PQY$ (by construction)

$$\therefore \quad \angle XBC = \angle YQR \ldots . \text{(i)}$$

$$\text{Also } \frac{XB}{YQ} = \frac{AB}{PQ}$$

(since $\triangle$s ABX and PQY are similar)

$$\text{But } \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

$$\therefore \quad \frac{XB}{YQ} = \frac{BC}{QR} \ldots . . \text{(ii)}$$

Hence by (i) and (ii) using theorem 3.3, we have triangles XBC and YQR are similar.

$$\therefore \quad \frac{\text{Area } \triangle XBC}{\text{Area } \triangle YQR} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AB^2}{PQ^2}$$

Similarly we can prove that triangles XCD and YRS are similar and so on.

$$\therefore \quad \frac{\triangle XAB}{\triangle YPQ} = \frac{\triangle XBC}{\triangle YQR} = \ldots = \frac{AB^2}{PQ^2}$$

$\therefore$ By the theorem on equal ratios,

$$\frac{\triangle XAB + \triangle XBC + \ldots}{\triangle YPQ + \triangle YQR + \ldots} = \frac{AB^2}{QR^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{Area } ABCDE}{\text{Area } PQRST} = \frac{AB^2}{QR^2}$$

Theorem 3.7:

If from the vertex of a right angled triangle a perpendicular is drawn to the hypotenuse, it divides the triangle into two similar triangles, similar to the original triangle.

$\angle YPQ = \angle XAB$ ಮತ್ತು $\angle YQP = \angle XBA$ ಆಗುವಂತೆ PY ಮತ್ತು QYಗಳನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಇವು Y ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ, ಸಂಧಿಸಲಿ. YR, YS, YT ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ: ರಚನೆಯಿಂದ, XAB ಮತ್ತು YPQ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿವೆ.

ಆದ ರಿಂದ $\dfrac{XAB \text{ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ}}{YPQ \text{ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ}} = \dfrac{AB^2}{PQ^2}$

ಈಗ $\angle ABC = \angle PQR$ ($\because$ ಬಹುಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿವೆ)

ಮತ್ತು $\angle ABX = \angle PQY$ (ರಚನೆ)

$\therefore \quad \angle XBC = \angle YQR$ —(i)

ABX ಮತ್ತು PQY ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$\frac{XB}{YQ} = \frac{AB}{PQ}$$

ಆದರೆ $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR}$

$$\therefore \quad \frac{XB}{YQ} = \frac{BC}{QR} \quad \text{........ (ii)}$$

ಈಗ (i), (ii) ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ 3·3 ಇವುಗಳಿಂದ,

XBC ಮತ್ತು YQR ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿವೆ.

$$\therefore \quad \frac{XBC \text{ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ}}{YQR \text{ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ}} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AB^2}{PQ^2}$$

ಹೀಗೆಯೇ XCD ಮತ್ತು YRS ತ್ರಿಭುಜಗಳೂ ಮತ್ತು ಇತರ ಸಹಗಮ್ಯ ತ್ರಿಭುಜಗಳೂ ಸಮರೂಪವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ $\dfrac{\triangle XAB}{\triangle YPQ} = \dfrac{\triangle XBC}{\triangle YQR} = \cdots = \dfrac{AB^2}{PQ^2}$

$\therefore$ ಸಮಪ್ರಮಾಣಗಳ ಗುಣದಿಂದ.

$$\frac{\triangle XAB + \triangle XBC + \cdots}{\triangle YPQ + \triangle YQR + \cdots} = \frac{AB^2}{QR^2}$$

$$\therefore \frac{\text{ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ } ABCDE}{\text{ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ } PQRST} = \frac{AB^2}{QR^2}$$

ಪ್ರಮೇಯ 3.7 :

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ಲಂಬವನ್ನೆಳೆದರೆ, ಅದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುದು.

Given : $\triangle ABC$ is right angled at A. AX is drawn perpendicular to BC.

To prove : The triangles ABX and ACX are similar to each other and each is similar to $\triangle ABC$.

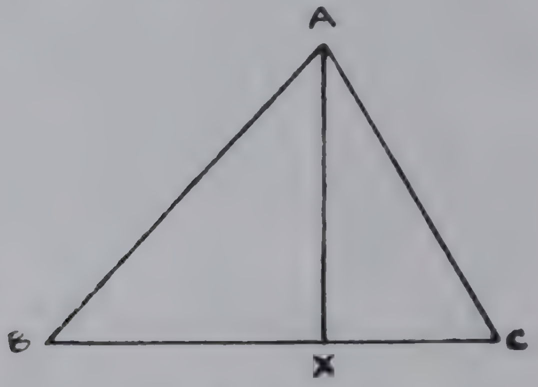


Fig. 3.9

Proof : in triangles ABX and CBA taken with the vertices in this order, $\angle AXB = \angle BAC$ and $\angle B$ is common.

$\therefore$ the triangles are equiangular and hence similar.

Similarly the triangles CAX and CBA are equiangular and similar.

Hence the triangles ABX and CAX are also equiangular and similar.

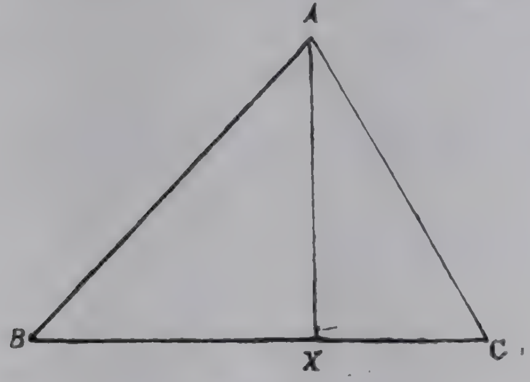
Cor 1 : Since triangles ABX and CBA are similar we have

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BX}{AB} \text{ or } AB^2 = BC.BX.$$

or AB is the mean proportional between BC and BX. milarly $AC^2 = CB.CX$.

ದತ್ತ: ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\angle A$ ಯು ಲಂಬಕೋನ. AX ನ್ನು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದಿದೆ.

ಸಾಧನೀಯ: ABX ಮತ್ತು ACX ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ $\triangle ABC$ ಗೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 3.9

ಸಾಧನೆ: ABX ಮತ್ತು CBA ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ (ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಈ ಕ್ರಮ ದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ)

$$\angle AXB = \angle BAC$$

$\angle B$ ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯ.

ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮಾನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಸಮ ರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಹೀಗೆಯೇ CAX ಮತ್ತು CBA ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಅದ್ದರಿಂದ ABX ಮತ್ತು CAX ತ್ರಿಭುಜಗಳೂ ಸಹ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಅನುಮಿತ 1: ABX ಮತ್ತು CBA ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BX}{AB} \text{ ಅಥವಾ } AB^2 = BC \cdot BX$$

ಅಥವಾ ABಯು BC ಮತ್ತು BX ಗಳ ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿಯಾಗಿರುವುದು,

ಹೀಗೆಯೇ $AC^2 = CB.CX$.

Cor 2: Since triangles ABX and CAX are similar, we have

$$\frac{BX}{AX}=\frac{AX}{CX} \text{ or } AX^2=BX.CX.$$

Cor 3 : Using results of Cor 1,

$$AB^2+AC^2=BC\ (BX+CX)=BC^2.$$

This is Bhaskara's proof of Pythagoras' theorem.

Construction 3.1

To divide a given line segment in a given ratio internally and externally.

Let AB be the given line segment and $m : n$ be the given ratio.

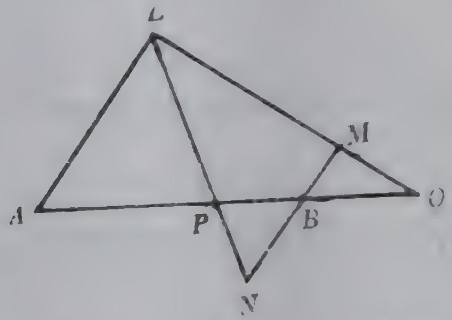


Fig. 3.10

Through A and B draw AL and BM parallel to each other. Cut off $AL=m$ units and $BM=BN=n$ units. Join LN. Let it meet AB at P. Join LM and produce it to meet AB produced at Q. P and Q divide AB internally and externally in the ratio $m : n$.

Note.—If $n>m$, we get Q on the other side of AB.

Construction 3.2

To find the fourth proportional to three given lengths a b and c.

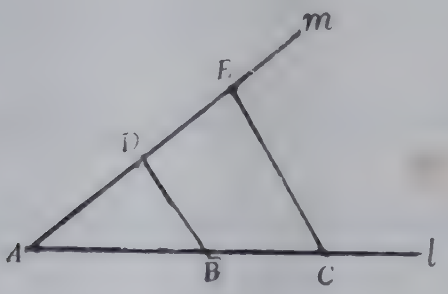


Fig. 3.11

ಅನುಮಿತ 2: ABX ಮತ್ತು CAX ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$\frac{BX}{AX} = \frac{AX}{CX} \text{ ಅಥವಾ } AX^2 = BX.CX.$$

ಅನುಮಿತ 3:—ಮೊದಲನೆಯ ಅನುಮಿತದಿಂದ

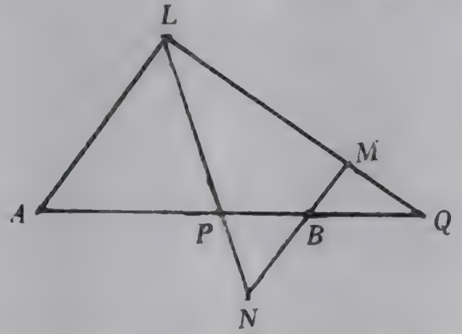
$$AB^2 + AC^2 = BC\,(BX + CX) = BC^2.$$

ಇದು ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೆ ಭಾಸ್ಕರನ ಸಾಧನೆ.

ರಚನೆ 3·1 :

ದತ್ತ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂತರೀಯವಾಗಿಯೂ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿಯೂ ವಿಭಾಗಿಸುವುದು.

ABಯು ದತ್ತ ರೇಖಾಖಂಡ ಮತ್ತು $m:n$ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರಮಾಣ



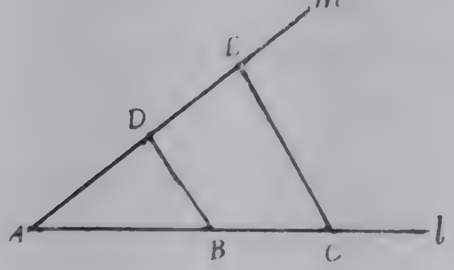
ಚಿತ್ರ 3.10

A ಮತ್ತು B ಗಳ ಮೂಲಕ AL ಮತ್ತು BM ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. $AL = m$ ಮೂಲಮಾನಗಳು ಮತ್ತು $BM = BN = n$ ಮೂಲ ಮಾನಗಳಿರುವಂತೆ $L.M,N$ ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. LN ಸೇರಿಸಿ. ಇದು AB ಯನ್ನು P ಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. LM ಸೇರಿಸಿ ಇದು ವೃದ್ಧಿಸಿದ AB ಯನು Q ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. ಈಗ P ಮತ್ತು Q ಗಳು AB ಯನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ $m:n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ.

$n>m$ ಆದಾಗ Q ಬಿಂದುವು ABಯ ಮತ್ತೊಂದು ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿರುವುದು.

ರಚನೆ 3·2 :

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೂರು ಉದ್ದಗಳ ಚತುರ್ಥಾನುಪಾತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.



ಚಿತ್ರ 3.11

Draw a line l and on it take $AB = a$ units and $BC = b$ units, on a convenient scale. Now draw another line m through A and cut off $AD = c$ Units. Join BD and through C draw CE parallel to BD to meet m in E. Now the length of the segment DE is the fourth proportional to a, b and c.

Construction 3.3

To find the mean proportional between two lengths.

Given : a and b are two lengths.

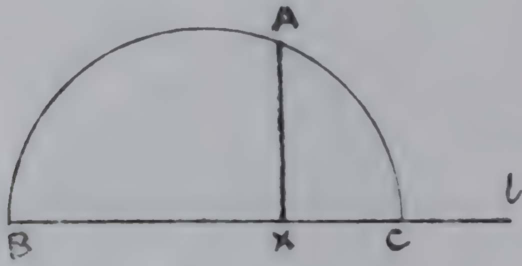


Fig. 3.12

Construction : Draw a line l and on it take points B and X such that $BX = a$ and on BX produced take C such that $XC = b$. Construct a semicircle on BC as diameter. Draw $XA \perp BC$ to meet the semicircle at A. Then AX is the required mean proportional, for $AX^2 = BX.XC$ by theorem 3.7, Cor 2.

(Note that AB is the mean proportional between BC and BX).

Construction 3.4

To find the third proportional between two lengths.

Given : a and b are two lengths.

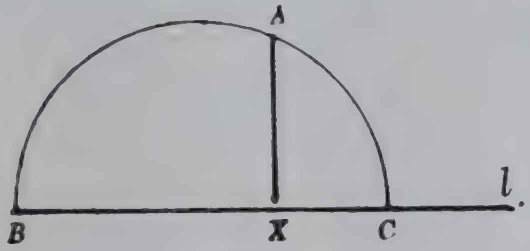
Construction.—Draw a line l and take a segment BC on it such that $BC = b$. Draw a semicircle with BC as diameter

ಯಾವುದಾದರೊಂದು ರೇಖೆ l ಎಳೆದು ಅದರಲ್ಲಿ $AB=a$ ಮೂಲಮಾನಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು $BC=b$ ಮೂಲಮಾನಗಳನ್ನೂ ಯಾವುದಾದರೂ ಅನುಕೂಲವಾದ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈಗ Aಯ ಮೂಲಕ ಮತ್ತೊಂದು ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆದು ಅದರಲ್ಲಿ $AD=c$ ಮೂಲಮಾನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. B ಮತ್ತು Dಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. Cಯ ಮೂಲಕ CEಯನ್ನು ABಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದು BDಯನ್ನು Eನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. ಈಗ DE ರೇಖಾಖಂಡದ ಉದ್ದವು a, b, c,ಗಳ ಚತುರ್ಥಾನುಪಾತಿಯಾಗಿರುವುದು.

ರಚನೆ 3·3:

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಉದ್ದಗಳ ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು,

ದತ್ತ: a ಮತ್ತು bಗಳು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಉದ್ದಗಳಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 3.12

ರಚನೆ: ಯಾವುದಾದರೊಂದು l ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆದು ಅದರಲ್ಲಿ $BX=a$ ಆಗಿರುವಂತೆ B ಮತ್ತು Xಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ. ವೃದ್ಧಿಸಿದ BX ಮೇಲೆ $XC=b$ ಆಗಿರುವಂತೆ Cಯನು ಗುರ್ತಿಸಿ. BC ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಅರ್ಧ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ವ ತ ವನ್ನು Aನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ, XA ರೇಖೆಯನ್ನು BCಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ AX ಬೇಕಾಗಿರುವ ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿ. ಕಾರಣ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯ 3.7ರಿಂದ $AX^2=BX.CX$ ಆಗಿರುವುದು.

ABಯು BC ಮತ್ತು BXಗಳ ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿಯೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ರಚನೆ 3·4:

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಉದ್ದಗಳಿಗೆ ತೃತೀಯಾನುಪಾತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

ದತ್ತ: a ಮತ್ತು bಗಳು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಉದ್ದಗಳು.

ರಚನೆ: ಯಾವುದಾದರೂ l ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಅದರಲ್ಲಿ $BC=b$ ಆಗಿರುವಂತೆ B ಮತ್ತು Cಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. BC ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಈಗ $BA=a$ ಆಗಿರುವಂತೆ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ A ಬಿಂದುವನ್ನು

and cut off $BA = a$. Draw $AX \perp BC$. Now BX is the required third proportional, for $AX^2 = BX.BC$.

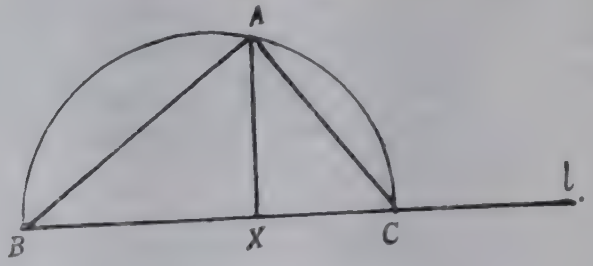


Fig. 3.13

Construction 3.5

To cut off a given fraction of a triangle by a line drawn parallel to a side.

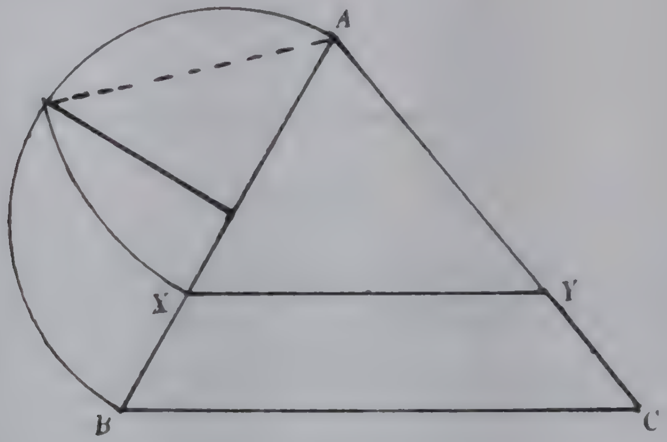


Fig. 3.14

It is required to draw a line $XY \parallel BC$ such that

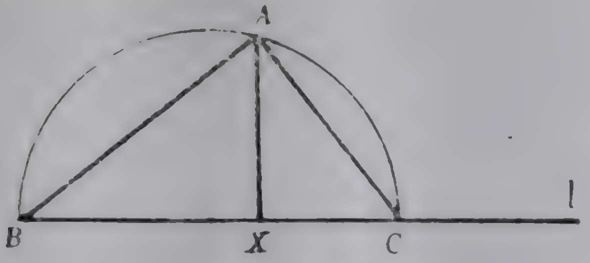
$\triangle AXY = \frac{m}{n} \triangle ABC$

Construction : Find a point P on AB such that

$$AP = \frac{m}{n} AB$$

Now let AX be the mean proportional between AP and AB. Through X draw XY parallel to BC then $\triangle AXY = \triangle \frac{m}{n} ABC$.

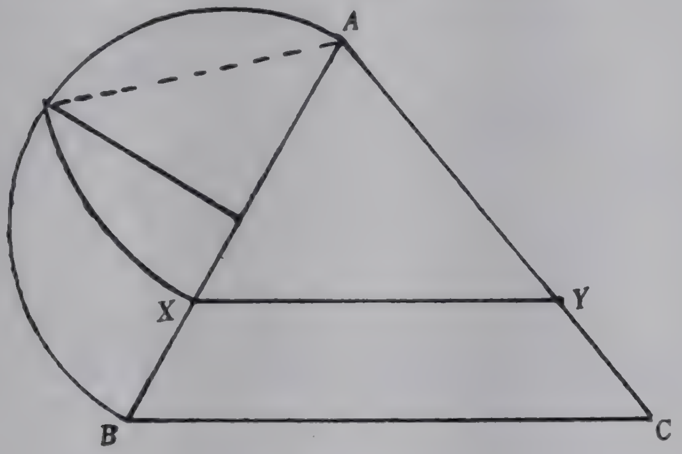
ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. AXನ್ನು BCಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ BX ಬೇಕಾಗಿರುವ ತೃತೀಯಾನುಪಾತಿ, ಕಾರಣ $AX^2 = BX.BC$.



ಚಿತ್ರ 3.13

ರಚನೆ 3·5:

ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯಿಂದ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಗೊತ್ತಾದ ಭಿನ್ನಾಂಶವನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸುವುದು.



ಚಿತ್ರ 3.14

ಕರ್ತವ್ಯ: $\Delta AXY = \frac{m}{n} \Delta ABC$ ಆಗುವಂತೆ BCಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ XY ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು.

ರಚನೆ: $AP = \frac{m}{n} AB$ ಆಗಿರುವಂತೆ AB ಯ ಮೇಲೆ P ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ AP ಮತ್ತು AB ಗಳ ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿ AX ಆಗಿರಲಿ. Xನ ಮೂಲಕ XY ನ್ನು BC ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಈಗ $\Delta AXY = \frac{m}{n} \Delta ABC$ ಆಗಿರುವುದು.

Proof : Triangles AXY and ABC are similar.

$$\therefore \frac{\triangle AXY}{\triangle ABC} = \frac{AX^2}{AB^2} = \frac{AP.AB}{AB^2} = \frac{AP}{AB} = \frac{m}{n}$$

Construction 3.6

To cut off a given fraction of a triangle by a line drawn perpendicu ar to a side.

It is required to draw a line $XY \perp BC$ such that th area cut off is equa to $\frac{m}{n} \triangle ABC$.

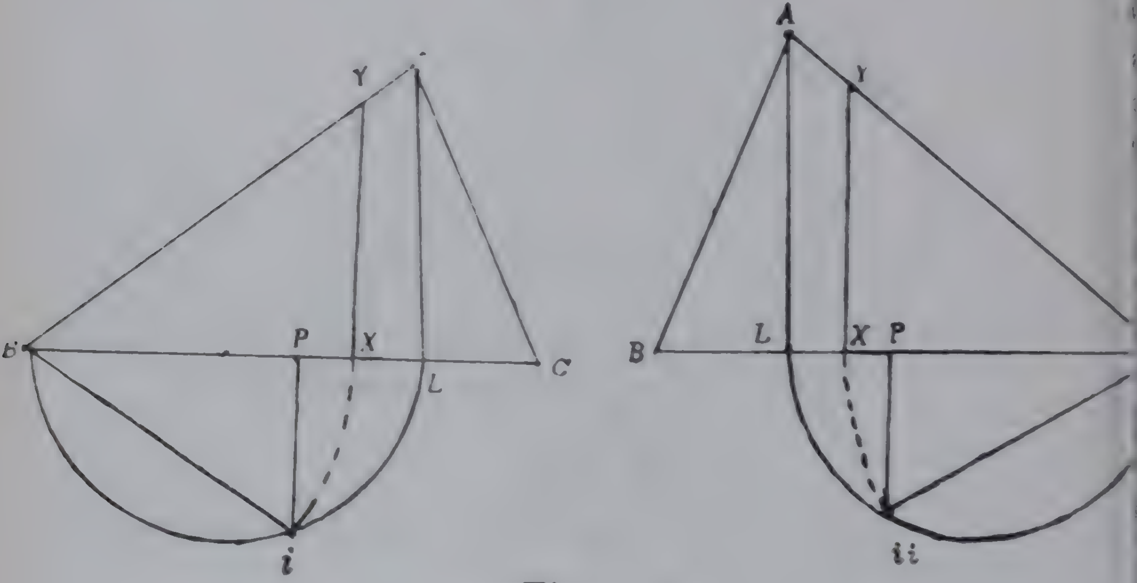


Fig. .15

Construction.—Draw $AL \perp BC$. On BC find P such that $BP = \frac{m}{n} BC$. Find BX the mean proportional between BL and BP. Through X draw $YX \perp BC$. Then area $\triangle BXY = \frac{m}{n} \triangle ABC$.

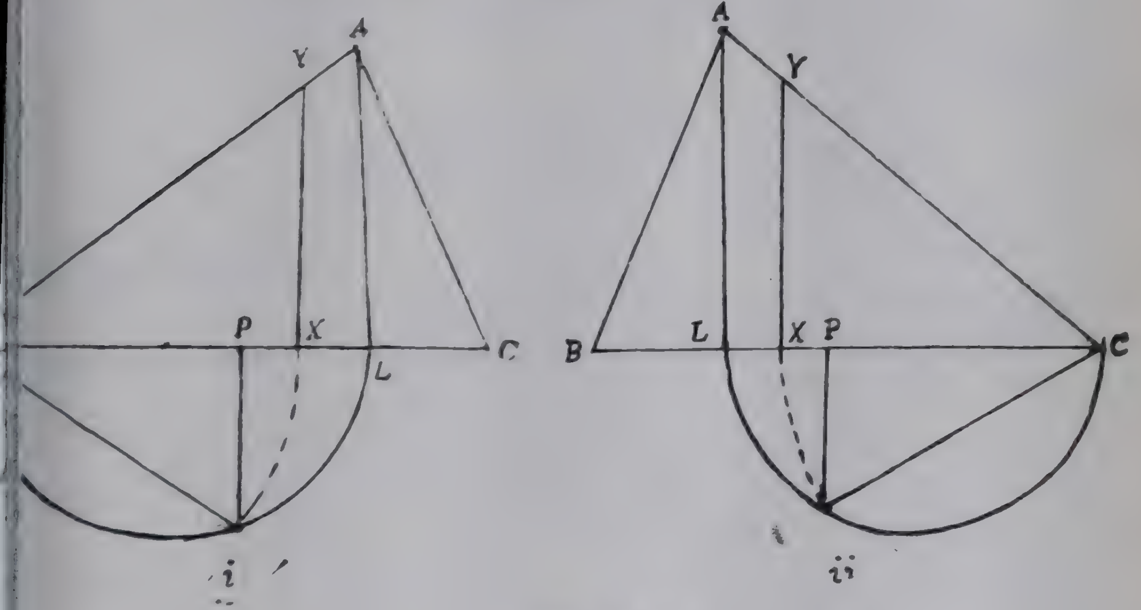
ಸಾಧನೆ: AXY ಮತ್ತು ABC ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿವೆ.

ಆದರಿಂದ $$\frac{\triangle AXY}{\triangle ABC} = \frac{AX^2}{AB^2} = \frac{AP\cdot AB}{AB^2} = \frac{AP}{AB} = \frac{m}{n}$$

ರಚನೆ 3:6

ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯಿಂದ ತ್ರಿಭುಜದ ತ್ರದ ಭಿನ್ನಾಂಶವನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸುವುದು.

ಕರ್ತವ : ABC ತ್ರಿಭುಜದ $\frac{m}{n}$ ಭಿನ್ನಾಂಶದಷ್ಟು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು BC ಗೆ ಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದ XY ರೇಖೆಯಿಂದ ವಿಭಾಗಿಸುವುದು.



ಚಿತ್ರ 3.15

ರಚನೆ: BC ಯ ಮೇಲೆ $BP = \frac{m}{n} BC$ ಆಗಿರುವಂತೆ P ಬಿಂದುವನ್ನು ಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. AL ನ್ನು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. BL ಮತ್ತು BP ಳ ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದು BX ಆಗಿರಲಿ. XY ನ್ನು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ $\triangle BXY = \frac{m}{n} \triangle ABC$ ಆಗಿರುವುದು.

Note.—While taking $BP = \frac{m}{n} BC$, if P lies on the other side of L, then take $CP = \frac{m}{n} BC$. In this case,

$$\text{area} \triangle CXY = \frac{m}{n} \triangle ABC$$

Proof : $\frac{\triangle BXY}{\triangle ABL} = \frac{BX^2}{BL^2}$ (since the triangles are similar)

$$= \frac{BP.BL}{BL^2} = \frac{BP}{BL}$$

Also $\frac{\triangle ABL}{\triangle ABC} = \frac{BL}{BC}$ (since they have the same altitude AL)

$$\therefore \quad \frac{\triangle BXY}{\triangle ABC} = \frac{BP}{BL} \cdot \frac{BL}{BC} = \frac{BP}{BC} = \frac{m}{n} .$$

Construction 3.8

To construct a triangle similar to a given triangle and equal in area to another given traingle.

It is required to construct a triangle similar to triangle ABC and equal in area to $\triangle DEF$.

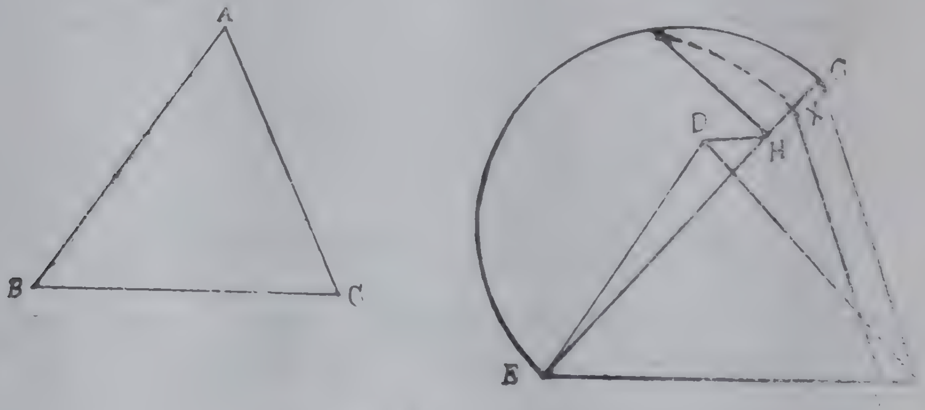


Fig.3 ·16

ಸೂಚನೆ: $BP = \frac{m}{n}\ BC$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾಗ, P ಯು L ಬಿಂದುವಿನ ಮತ್ತೊಂದು ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ಬಂದರೆ, ಆಗ $CP = \frac{m}{n}\ BC$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $\triangle CXY = \frac{m}{n} \triangle ABC$ ಆಗಿರುವುದು.

ಸಾಧನೆ: $\frac{\triangle BXY}{\triangle ABL} = \frac{BX^2}{BL^2}$ (∵ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿವೆ)

$$= \frac{BP.BL}{BL^2} = \frac{BP}{BL}$$

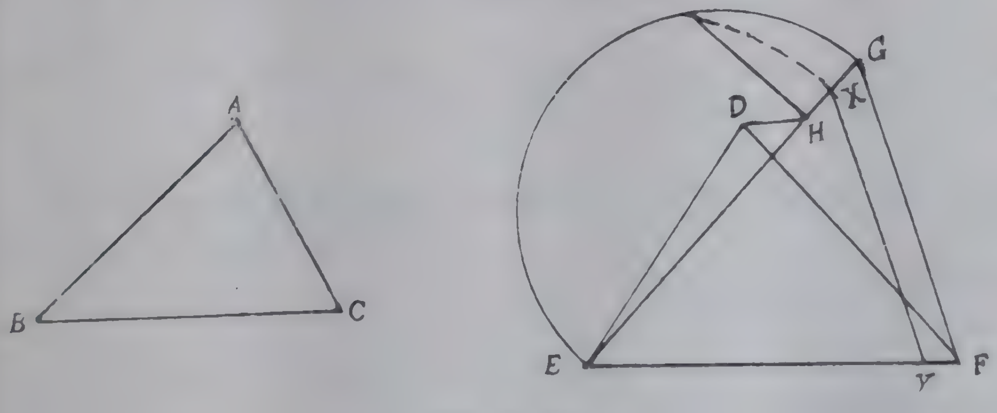
ಪುನಃ $\frac{\triangle ABL}{\triangle ABC} = \frac{BL}{BC}$ (∵ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಎತ್ತರವೂ AD ಆಗಿದೆ.)

$$\therefore \quad \frac{\triangle BXY}{\triangle ABC} = \frac{BP}{BL} \cdot \frac{BL}{BC} = \frac{BP}{BC} = \frac{m}{n}\ .$$

ರಚನೆ 3.8:

ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜವೊಂದಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತೊಂದಕ್ಕೆ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದಲ್ಲಿ ಸಮವಾಗಿಯೂ ಇರುವಂತೆ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

ಕರ್ತವ್ಯ: ABC ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು DEF ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿಯೂ ಇರುವ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.



ಚಿತ್ರ 3.16

At E construct an angle equal to $\angle B$ and at F construct an angle equal to $\angle C$. Let the two lines meet in G. Draw DH parallel to EF, to meet EG at P.

Find EX the mean proportional between EH and EG. Draw $XY \parallel GF$ to meet EF (or EF produced) at Y. Then XEY is the required traingle.

Proof : $\dfrac{\triangle EXY}{\triangle GEF} = \dfrac{EX^2}{EG^2} = \dfrac{EH.EG}{EG^2} = \dfrac{EH}{EG}$

Also, $\dfrac{\triangle EHF}{\triangle GEF} = \dfrac{EH}{EG}$ since the two traingles have the same altitude from F.

$$\therefore \quad \frac{\triangle EXY}{\triangle GEF} = \frac{\triangle EHF}{\triangle GEF}$$

$\therefore \quad \triangle EXY = \triangle EHF.$

But $\triangle DEF = \triangle EHF$

$\therefore \quad \triangle DEF = \triangle EXY$

Also $\triangle EXY$ is similar to $\triangle GEF$. *i.e.*, to $\triangle ABC$.

$\therefore EXY$ is the required traingle.

Exercises 3.1

1. Prove that two isosceles traingles having their vertical angles equal are similar.

2. ABC and PQR are similar traingles having $AB = 4$ $BC = 5$, $\angle B = 70°$ and $CA = 3$. If $QR = 7.5$, write down the value of $\angle P$, PQ and PR.

3. In any triangle ABC show that the median AD bisects all lines parallel to the base BC.

ರಚನೆ: E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $\angle B$ಗೆ ಸಮವಾದ ಕೋನವನ್ನೂ ಮತ್ತು F ನಲ್ಲಿ $\angle C$ ಗೆ ಸಮವಾದ ಕೋನವನ್ನೂ ರಚಿಸಿ. ಈ ರೇಖೆಗಳು G ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. EF ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ DH ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಇದು EG ಯನ್ನು P ಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.

ಈಗ EH ಮತ್ತು EG ಗಳಿಗೆ ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿಯಾಗಿರುವಂತೆ EX ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈಗ EF ನ್ನು Y ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ XY ನ್ನು GF ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. XEY ಎಂಬುದು ಬೇಕಾದ ತ್ರಿಭುಜ.

ಸಾಧನೆ: $$\frac{\triangle EXY}{\triangle GEF} = \frac{EX^2}{EG^2} = \frac{EH \cdot EG}{EG^2} = \frac{EH}{EG}$$

ಮತ್ತು $$\frac{\triangle EGF}{\triangle GEF} = \frac{EH}{EG}$$ (ಕಾರಣ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿಯೂ F ನಿಂದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ)

$$\therefore \quad \frac{\triangle EXY}{\triangle GEF} = \frac{\triangle EHF}{\triangle GEF}$$

$$\therefore \quad \triangle EXY = \triangle EHF$$

ಆದರೆ $\triangle DEF = \triangle EHF$

$$\therefore \quad \triangle DEF = \triangle EXY.$$

ಇದೂ ಅಲ್ಲದೆ $\triangle EXY$ ಮತ್ತು $\triangle EGF$ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು

ಅಥವಾ $\triangle EXY$ ಮತ್ತು $\triangle ABC$ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು.
ಆದ್ದರಿಂದ EXY ಬೇಕಾದ ತ್ರಿಭುಜ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 3.1

1 ಶಿರಃ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಸಮದ್ವಿಬಾಹುತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

2 ABC ಮತ್ತು PQR ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ $AB=4$, $BC=5$, $\angle B=70°$ ಮತ್ತು $CA=3$ ಆಗಿದೆ. $QR=7.5$ ಆದರೆ $\angle P$, PQ, ಮತ್ತು PR ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

3 ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ, BC ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಎಲ್ಲ ರೇಖೆಗಳನ್ನೂ AD ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು ಅರ್ಧಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4 Prove that the chords of two circles which subter equal angles either at the centre or at the circumferen are in the ratio of the diameters of the circles.

5 If two triangles have the sides of one respective parallel to the sides of the other, prove that the triangl are similar.

6 If two triangles have the sides of one respective perpendicular to the sides of the other, prove that tl triangles are similar.

7 If two triangles are similar prove that (i) corre ponding medians (ii) corresponding altitudes (iii) bisecto of corresponding angles (vi) the circumradii (v) the i radii are in the same ratio as the corresponding sides.

8 If AB and CD are two chords of a circle intersecti at X prove that $AX.XB = CX.XD$. (work out both case X an internal point and X outside the circle.)

9 If a secant drawn through O cuts a circle in P and and if OT is a tangent prove that triangles OTQ, ar OPT are similar and deduce that $OT^2 = OP.OQ$.

10 If two lines AB and CD intesect in X and it $AX.XB = CX.XD$, prove that A, B, C, D are concyli (Converse of *ex.* 8)

11 ABC is a triangle. O is a point on BA produce such that $OA.OB = OC^2$. Prove that OC touches th circle ABC. (Converse of *ex.* 9)

12 ABC is a triangle. The tangent to the circun circle of the triangle drawn at A meets BC produced at (Show that

$$\frac{OB}{OC} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

13 The bisector of $\angle A$ of triangle ABC meets B at O and the circumcircle at E, prove that
$AB \cdot AC = AD^2 + AD \cdot AE$ and hence
$AB \cdot AC = AD^2 + BD \cdot DC$.

4 ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿಯಾಗಲೀ ಅಥವಾ ಪರಿಧಿಯಲ್ಲಿಯಾಗಲೀ ಸಮವಾದ ಕೋನಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಜ್ಯಾಗಳು, ಆ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯಾಸಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

5 ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಬಾಹುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮತ್ತೊಂದರ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6 ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಬಾಹುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮತ್ತೊಂದರ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

7 ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿದ್ದರೆ, (i) ಸಹಗಮ್ಯವಾದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳೂ (ii) ಸಹಗಮ್ಯ ಕೋನಗಳ ಅರ್ಧಕಗಳೂ (iii) ಸಹಗಮ್ಯ ಲಂಬಕಗಳೂ (iv) ಪರಿವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳೂ (v) ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳೂ, ಸಹಗಮ್ಯ ಬಾಹುಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿಯೇ ಇರುತ್ತವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8 ಒಂದು ವೃತ್ತದ AB ಮತ್ತು CD ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು X ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. $AX.XB = CX.XD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. [X. ವೃತ್ತದ ಅಂತರೀಯ ಬಿಂದು, ಅಥವಾ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದು—ಎರಡೂ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.]

9 O ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತವೊಂದಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಛೇದಕ ರೇಖೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು. OTಯು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, OTQ ಮತ್ತು OPT ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿವೆಯೆಂದೂ, $OT^2 = OP.OQ$ ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿ.

10 AB ಮತ್ತು CD ರೇಖಾಖಂಡಗಳು X ನಲ್ಲಿ ಛೇಧಿಸುತ್ತವೆ. $AX.XB = CX.XD$ ಆಗಿದ್ದರೆ, A, B, C, D ಗಳು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. (ಅಭ್ಯಾಸ 8 ರ ವಿಲೋಮ).

11 ABC ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ. ವೃದ್ಧಿಸಿದ BA ಮೇಲೆ $OA.OB = OC^2$ ಆಗುವಂತೆ O ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. OCಯು ABC ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ (ಅಭ್ಯಾಸ 9 ರ ವಿಲೋಮ).

12 ABC ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ. ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿವೃತ್ತಕ್ಕೆ A ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು BC ಯನ್ನು O ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು. $\dfrac{OB}{OC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

13 ABC ತ್ರಿಭುಜದ A ಕೋನದ ಅರ್ಧಕವು BC ಯನ್ನು D ನಲ್ಲಿಯೂ ಮತ್ತು ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು E ನಲ್ಲಿಯೂ ಸಂಧಿಸುವುದು $AB.AC = AD^2 + AD.AE$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ $AB.AC = AD^2 + BD.DC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

14 Prove that the rectangle contained by an two sides of a triangle is equal to the rectangle containe by the altitude to the third side and the diameter of th circle circumscribed to the triangle.

(Hint : In $\triangle ABC$, to prove $AB.\ AC =$ altitude AL circum diameter, draw the circum diameter AX an join XB).

15 Two circle intersect at P. The tangents at I to the two circles form chords PQ, PR. Show that PC and PR are proportional to the diameters of the circles.

16 ABC is an isosceles triangle with $AB = AC$ The perpendicular bisector of AB meets BC in D. Sho that $BC \cdot BD = BA^2$.

(Hint : Show that $\triangle ACB$ is similar to $\triangle BAD$).

17 Show that the area of a regular hexagon inscribe in a circle is $\frac{3}{4}$ the area of a regular hexagon circumscribe to the circle.

18 $ABCD$ is a parallelogram. CD is bisected at E AC and BE intersect at P. Show that AC is trisected at P

19 AB is a diameter of a circle and AM, BN ar drawn perpendicular to the tangent at any point C. Sho that the area of triangle ABC is equal to the sum of th areas of triangles ACM and CBN.

(Hint : Show that $\triangle AMC$ is similar to $\triangle BNC$).

20 Triangle ABC is right angled at A. If AD i drawn perpendicular to BC, prove that

$$AB^2 : AC^2 = BD : DC.$$

21 P, Q, R are points on the sides BC, CA, AB o $\triangle ABC$ such that $BP = 2\ PC$, $CQ = \frac{1}{3}\ QA$ and $AR = \frac{3}{4}\ RB$ Show that the area of $\triangle PQR = \dfrac{3}{14}$ area of $\triangle ABC$.

22 D and E are points in the base BC of $\triangle ABC$ such that $\angle ADB = \angle BCA$ and $\angle CAE = \angle CBA$.

Prove that— (i) $BD.CE = AD.AE$ and
(ii) $AB^2 = BC.BD$.

14 ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಿಂದಾದ ಆಯವು, ತ್ರಿಭುಜದ ಲಂಬಕ ಮತ್ತು ಪರಿವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ ಇವುಗಳಿಂದ ಆದ ಆಯಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(ಸೂಚನೆ : ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, $AB.AC =$ ಎತ್ತರ AD. ಪರಿವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲು, ಪರಿವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ AXನ್ನು ಎಳೆದು, XB ಸೇರಿಸಿ.)

15 ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು P ಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುವು. P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳು PQ ಮತ್ತು PR ಜ್ಯಾಗಳಾಗಿವೆ. PQ ಮತ್ತು PR ಗಳು ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯಾಸಗಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

16 ABC ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ. ಇದರಲ್ಲಿ $AB = AC$. ABಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕವು BCಯನ್ನು Dಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು $BC \cdot BD = BA^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(ಸೂಚನೆ : BCA ಮತ್ತು BAD ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.)

17 ವೃತ್ತಾಂತರ್ಗತವಾದ ಒಂದು ಸಮ ಷಡ್ಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಆ ವೃತ್ತದ ವೃತ್ತೋಪರಿ ಸಮ ಷಡ್ಭುಜದ $\frac{3}{4}$ ರಷ್ಟಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

18 $ABCD$ಯು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ. CD ಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಿಸಿದೆ. AC ಮತ್ತು BE ಗಳು P ಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುವು. AC ಯು P ಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

19 AB ಯು ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು AM, BN ಗಳನ್ನು ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದು C ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬಗಳಾಗಿ ಎಳೆದಿದೆ. ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು, ACM ಮತ್ತು CBN ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(ಸೂಚನೆ : AMC ಮತ್ತು CNB ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ).

20 ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\angle A$ ಯು ಲಂಬ ಕೋನ. AD ಯು BC ಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವಾದರೆ, $AB^2 : AC^2 = BD : DC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

21 ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ P, Q, R ಬಿಂದುಗಳನು ಕ್ರಮವಾಗಿ $BP = 2\ PC$, $CQ = \frac{1}{3} QA$ ಮತ್ತು $AR = \frac{3}{4} RB$ ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. PQR ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲವು ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ $\frac{3}{14}$ ರಷ್ಟಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

22 ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ BCಯಲ್ಲಿ D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳನು $\angle DAB = \angle BCA$ ಮತ್ತು $\angle CAE = \angle CBA$ ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ, (i) $BD.CE = AD.AE$ ಮತ್ತು (ii) $AB^2 = BC \cdot BD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

23 Two circles touch at O externally. AOB and COD are two straight lines cutting the circles again in A, B and C, D.

Prove that—

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}.$$

24 D is a point on the side AB of a $\triangle ABC$ such that $AD = 3\ BD$. If DQ and DP are drawn parallel to BC and CA respectively, show that the area of the parallelogram $DQCB$ is $\frac{3}{8}$ that of triangle ABC.

Practical Exercises :—

1. Draw a line 2·7″ long and divide it in the atio 3 : 2 internally and externally.

2. Draw a line 4·8″ long and divide it in the ratio 5 : 3 internally and externally.

3. Find the third proportional of lengths 4 and 6 units geometrically.

5. Find the sq. roots of 2 and 15 geometrically by the method of mean proportional. Hence again find the square root of $2\sqrt{2}$.

6. Construct $\triangle$ ABC having.

(*a*) $BC = 4{\cdot}5$ cms $AB : AC = 5 : 4$ and median $AD = 5$ cms.

(Hint : Draw the Appolonius' circle. From D the mid point of BC, cut off $DA = 5$ cms).

(*b*) $BC = 3.5''$ $AB : AC = 4 : 3$ Median $AD = 4''$.

(*c*) $BC = 6.7$ cms $AB : AC = 7 : 3$ $\angle A = 50°$.

(Construct a segment of circle on BC containing an angle 50° to meet the Appolonius' circle at A).

23 ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ. AOB ಮತ್ತು COD ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ವೃತ್ತವನ್ನು ಪುನಃ A, B ಮತ್ತು C, D ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದಿದೆ.

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

24 ABC ತ್ರಿಭುಜದ AB ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ $AD=3BD$ ಆಗುವಂತೆ D ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. DQ ಮತ್ತು DP ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ BC ಮತ್ತು CA ಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದರೆ, $DQCB$ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ $\frac{3}{8}$ ರಷ್ಟಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು:—

1. $2{\cdot}7''$ ಉದ್ದವಿರುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನೆಳೆದು ಅದನ್ನು $3:2$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ.

2. $4{\cdot}8''$ ಉದ್ದವಿರುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನೆಳೆದು ಅದನ್ನು $5:3$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ.

3. ಕ್ರಮವಾಗಿ 4 ಮತ್ತು 6 ಮೂಲಮಾನಗಳ ಉದ್ದವುಳ್ಳ ರೇಖಾಭಾಗಗಳ ತೃತೀಯಾನುಪಾತಿಯನ್ನು ರೇಖಾಚಿತ್ರದಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. 2 ಮತ್ತು 15 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳಿಂದ ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿಗಳ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದರಿಂದ $2\sqrt{2}$ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಈ ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಂದ ABC ತ್ರಿಭುಜವನು ರಚಿಸಿ.

(a) $BC=4{\cdot}5$ ಸೆಂ. ಮಿ. $AB : AC = 5:4$ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯ ರೇಖೆ $AD = 5$ ಸೆಂ. ಮಿ.

(ಸೂಚನೆ: ಅಪಲೋನಿಯಸ್ ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆದು, BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು D ಯಿಂದ $DA=5$ ಸೆಂ. ಮಿ. ಕತ್ತರಿಸಿ)

(b) $BC = 3{\cdot}5''$ $AB : AC = 4 : 3$ ಮಧ್ಯರೇಖೆ $AD = 4''$.

(c) $BC=6{\cdot}7$ ಸೆಂ. ಮಿ. $AB : AC = 7 : 3$ $\angle A=50^\circ$. (BCಯ ಮೇಲೆ 50° ಇರುವ ವೃತ್ತಖಂಡವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಇದು ಅಪಲೋನಿಯಸ್ ವೃತ್ತವನ್ನು A ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.)

(*d*) $AB : AC = 4 : 3$, $\angle B = 50°$ and perimeter 15 cms

(*e*) $BC = 2.9''$, $AB : AC = 3 : 5$ and internal bisector of angle $A = 2.3''$.

(*f*) $BC = 5.3$ cms, $AB : AC = 5 : 2$ and external bisector of $\angle A = 3.5$ cms.

7. Construct $\triangle ABC$ having $AB = 4.2$ cms, $AC = 5.$ cms and $\angle ABC = 60°$. Construct a triangle similar to this and perimeter 12 cms.

8. Construct $\triangle ABC$ given, $BC = 7$ cms $\angle B = 6$ and $AB = 5$ cms. Cut off $\frac{2}{3}$ of its area (i) by a line drawn parallel to BC (ii) by a line drawn perpendicular to BC.

9. Construct a triangle whose sides are in the ratio $5 : 7 : 9$ and whose area is 10 square cms.

10. Construct an equilateral triangle of area 16 sq. cms.

11. Construct $\triangle ABC$ given, $BC = 6.4$ cms $AB : AC = 5 : 3$ and median $BE = 6.6$ cms.

12. Construct a regular hexagon of area 60 sq. cms.

(Hint : Construct an equilateral $\triangle$ of area 10 sq. cms).

13. Construct a parallelogram $ABCD$ in which $AB = 2.5''$, $AD = 2''$, $BD = 3.4''$. Divide the parallelogram into three equal parts by two lines parallel to diagonal AC.

(d) $AB : AC = 4 : 3$ $\angle B = 50°$ ಮತ್ತು ಸುತ್ತಳತೆ 15 ಸೆಂ. ಮಿಾ.

(e) $BC = 2{\cdot}9''$ $AB : AC = 3 : 5$ ಮತ್ತು A ಕೋನದ ಅಂತರೀಯ ಸಮಭಾಜಕ$= 2{\cdot}3''$.

(f) $BC = 5{\cdot}3$ ಸೆಂ. ಮಿಾ. $AB : AC = 5 : 2$ ಮತ್ತು A ಕೋನದ ಬಾಹ್ಯ ಸಮಭಾಜಕ$= 3{\cdot}5$ ಸೆಂ. ಮಿಾ.

7. $AB = 4.2$ ಸೆಂ.ಮಿಾ., $AC = 5.3$ ಸೆಂ.ಮಿಾ. ಮತ್ತು $\angle ABC = 60°$ ಇರುವಂತೆ ABC ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಇದಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿ 12 ಸೆಂ.ಮಿಾ. ಸುತ್ತಳತೆ ಇರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

8. $BC = 7$ ಸೆಂ.ಮಿಾ. $\angle B = 65°$ ಮತ್ತು $AB = 5$ ಸೆಂ.ಮಿಾ. ಇರುವಂತೆ ABC ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಇದರ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲದ $\frac{2}{3}$ ಭಾಗವನ್ನು (i) BC ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯುವುದರಿಂದ, (ii) BC ಗೆ ಲಂಬವಾದ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯುವುದರಿಂದ, ವಿಭಾಗಿಸಿ.

9. ಬಾಹುಗಳು $5 : 7 : 9$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿಯೂ, ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು 10 ಚ.ಸೆಂ.ಮಿಾ.ಗಳೂ ಇರುವಂತೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

10. 16 ಚ. ಸೆಂ.ಮಿಾ. ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವಿರುವ ಒಂದು ಸಮಬಾಹುತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

11. $BC = 6.4$ ಸೆಂ.ಮಿಾ., $AB : AC = 5 : 3$ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯರೇಖೆ $BE = 6.6$ ಸೆಂ.ಮಿಾ. ಇರುವಂತೆ ABC ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

12. 60 ಚ. ಸೆಂ.ಮಿಾ. ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವಿರುವ ಒಂದು ಸಮ ಷಡ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ. (ಸೂಚನೆ: 10 ಚ. ಸೆಂ. ಮಿಾ. ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವಿರುವ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ.)

13. $AB = 2.5''$, $AD = 2''$, ಮತ್ತು $BD = 3.4''$ ಇರುವಂತೆ $ABCD$ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ. AC ಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಅದನ್ನು ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿ.

CHAPTER 4

PRELIMINARY CONCEPTS OF ANALYTIC GEOMETRY

Analytic geometry is the study of geometry using the methods of algebra. In this subject we study how the positions of points may be determined by means of numbers and how equations can be used to study the properties of curves. The French Mathematician Rene Decartes (1596—1650) was the first who started this method of studying geometry and experience has shown that this method, in many cases, is more powerful and shorter than other methods

4.1. Rectangular Co-ordinates—

Let $X'X$ and $Y'Y$ be two perpendicular straight lines in a plane intersecting each other at O and let P be a point in this plane. Let PM and PN be drawn perpendicular to $X'X$ and $Y'Y$ respectively. The position of P, then, is known relatively to the given lines $X'X$ and $Y'Y$ when the magnitudes and directions of OM and ON are given. (See Fig. 4.1).

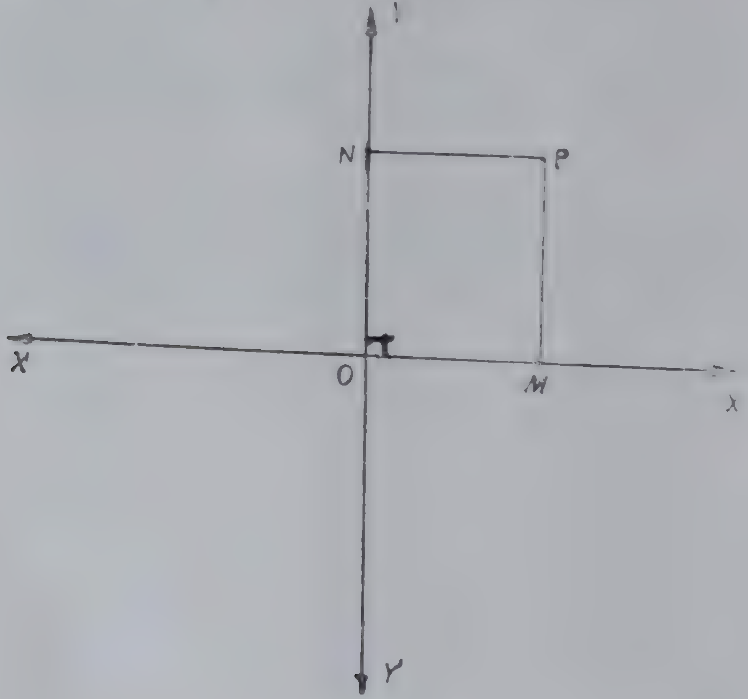


Fig. 4.1

ಅಧ್ಯಾಯ 4

ಬೀಜ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ಭಾವನೆಗಳು

ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವುದು ಬೀಜರೇಖಾ ಗಣಿತವೆನಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಗಣಿತ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನು । ಹೇಗೆ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು ಹಾಗೂ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ರೇಖೆಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ತಿಳಿಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಲಿಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಮೊಟ ಮೊದಲನೆಯದಾಗಿ ರೇನೆ ಡೆಕಾರ್ಟ್ (1596–1650) ಎಂಬ ಫ್ರೆಂಚ್ ಗಣಿತಜ್ಞನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದನು. ಈ ವಿಧಾನವು ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಇತರ ವಿಧಾನಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಬಲವಾಗಿ, ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿ ಇರುವುದಾಗಿ ಅನುಭವದಿಂದ ತಿಳಿದುಬಂದಿದೆ.

4.1 ಲಂಬ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$X'X$ ಮತ್ತು $Y'Y$ ಗಳು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಹಾಗೂ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ O ಎಂಬಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು P ಎಂಬುದು ಈ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ, PM ಮತ್ತು PN ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ $X'X$ ಮತ್ತು $Y'Y$ ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿರಲಿ. ಆಗ, OM ಮತ್ತು ONಗಳ ಪರಿಮಾಣ ಮತ್ತು ದಿಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ $X'X$ ಮತ್ತು $Y'Y$ಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ Pಯ ಸ್ಥಾನವು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 4.1 ನೋಡಿ)

ಚಿತ್ರ, 4.1

As a convention let us take the distances measured i the directions of OX and OY as positive and those measure in the directions of OX' and OY' as negative. We shal call the distances with the proper signs attached to ther using the above convention as '**directed distances**'. T distinguish between 'distance' and 'directed distance we write P_1P_2, to denote the distance between P_1 and P_2 and $\overrightarrow{P_1P_2}$, to denote the directed distance from P_1 to P_2

Accordingly $\overrightarrow{P_1P_2} = -\overrightarrow{P_2P_1}$ and $P_1P_2 = |\overrightarrow{P_1P_2}| = |\overrightarrow{P_2P_1}|$ It can be easily deduced from this that if P_1, P_2, P_3 ar three points on a straight line, then $\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{P_1P_3}$ an $\overrightarrow{{}_1P_3} - \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2P_3}$.

$$\text{Now let } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NP} \text{ be } x$$

$$\text{and } \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{MP} \text{ be } y.$$

Then x and y define (or determine) the position of th point P in the plane so that if we are given x and y, w can find the point P (why ?).

For example, suppose we are required to mark th point P indicated by $x = 4$ and $y = -3$. measure along OX $OM = 4$ units and measure a length MP $(= ON)$ in th direction of OY', *i.e* parallel to OY' equal to 3 units. W arrive at the point P required.

Here We call $\overrightarrow{OM} = x$ and $\overrightarrow{ON} = y$ as the **rectangula cartesian coordinates** of the point P *w.r.t.* $X'X$ and $Y'Y$ We write this as $P \equiv (x, y)$. $X'X$ and $Y'Y$ together are called **the co-ordinate axes** and O is called **the origin.** I particular x is called **the abscissa or the x-co-ordinate,** y i called **the ordinate or the y-co-ordinate.** $X'X$ is called th **x-axis and** $Y'Y$ is called **the y-axis.**

ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ OX ಮತ್ತು OY ಗಳ ದಿಕ್ಕುಗಳಲ್ಲಿ ಅಳೆದ ದೂರಗಳನ್ನು ಧನವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು OX' ಮತ್ತು OY'ಗಳ ದಿಕ್ಕುಗಳಲ್ಲಿ ಅಳೆದ ದೂರಗಳನ್ನು ಋಣವಾಗಿಯೂ ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಈ ಸಂಕೇತಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಸೂಕ್ತ ಚಿಹ್ನೆಗಳಿಂದೊಡ ಗೂಡಿದ ದೂರಗಳನ್ನು 'ನಿರ್ದೇಶಿತ ದೂರ' ಗಳೆಂದು ಕರೆಯೋಣ. 'ದೂರ' ಮತ್ತು 'ನಿರ್ದೇಶಿತ ದೂರ' ಗಳಿಗಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ನಾವು P_1 ಮತ್ತು P_2 ಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು $P_1 P_2$ ಎಂದೂ, P_1 ನಿಂದ P_2 ಗಿರುವ ನಿರ್ದೇಶಿತ ದೂರವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು $\overrightarrow{P_1P_2}$ ಎಂದೂ ಬರೆಯೋಣ. ಈ ಪ್ರಕಾರ $\overrightarrow{P_1P_2} = -\overrightarrow{P_2P_1}$ ಮತ್ತು $P_1 P_2 \equiv \overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{P_2 P_1}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. P_1, P_2, P_3 ಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಾದಾಗ $\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{P_1P_3}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{P_1P_3} - \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2P_3}$ ಎಂದು ಇದರಿಂದ ಸುಲಭವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಈಗ, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NP}$ ಯು x

ಮತ್ತು $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{MP}$ ಯು y ಯೂ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, x ಮತ್ತು y ಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ P ಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗುವಂತೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳು Pಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x = 4$ ಮತ್ತು $y = -3$ ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದು P ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕಾದರೆ, OX ನಲ್ಲಿ $OM = 4$ ಮಾನಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು OY' ನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಎಂದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ $MP \ (=ON) = 3$ ಮಾನಗಳನ್ನೂ ಅಳೆಯಿರಿ. ಆಗ ನಾವು ಗುರುತಿಸಬೇಕಾಗಿದ್ದ Pಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸೇರುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ ನಾವು $\overrightarrow{OM} = x$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{ON} = y$ ಗಳನ್ನು $X'X$ ಮತ್ತು $Y'Y$ ಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ Pಯ ಕಾರ್ಟೇಸಿಯನ್ ಲಂಬನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $P \equiv (x, y)$ ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. $X'X$ ಮತ್ತು $Y'Y$ ಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳೆಂದೂ, Oವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವೆಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. xನ್ನು ಕೋಟಿ ಅಥವಾ x-ನಿರ್ದೇಶಕವೆಂದೂ yನ್ನು ಭುಜ ಅಥವಾ y-ಸ್ಥಾನನಿರ್ದೇಶಕ ವೆಂದೂ, $X'X$ ನ್ನು x-ಅಕ್ಷವೆಂದೂ, $Y'Y$ ಯನ್ನು y-ಅಕ್ಷವೆಂದೂ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

It is to be noted that in this process of finding the co-or(
nates of a point, we assign to each point P, a pair of numbe
(x, y). Conversely, it is also to be noted that to ea
pair of numbers there corresponds one and only one poi
in the plane.

It is customory to take a horizontal line as x-axis a
a vertical line as y-axis such that X lies to the right of a
Y lies above the origin (see Fig. 4.2). Hence hereafter
shall consider x to be positive or negative according as M li
to the right or to the left of the origin on the x-ax
Simlarly y is considered to be positive or negative accor
ing as N lies above or below the origin on the y-axis.

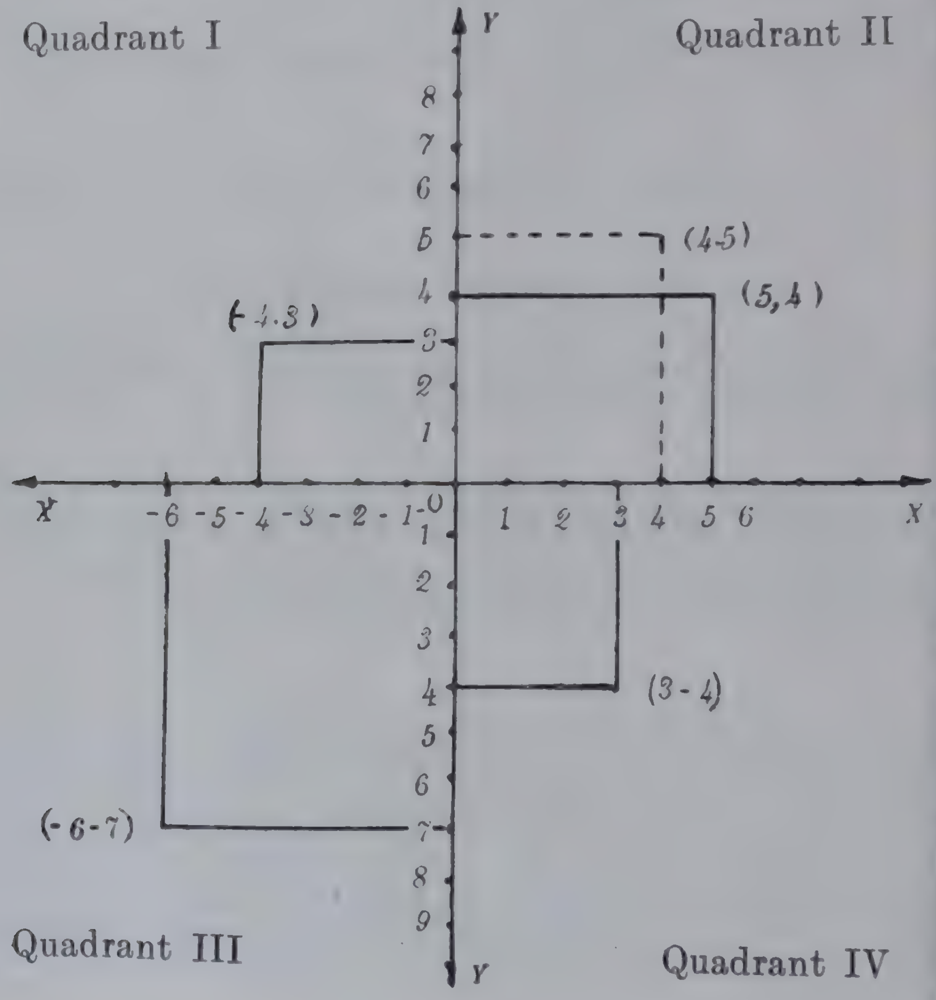
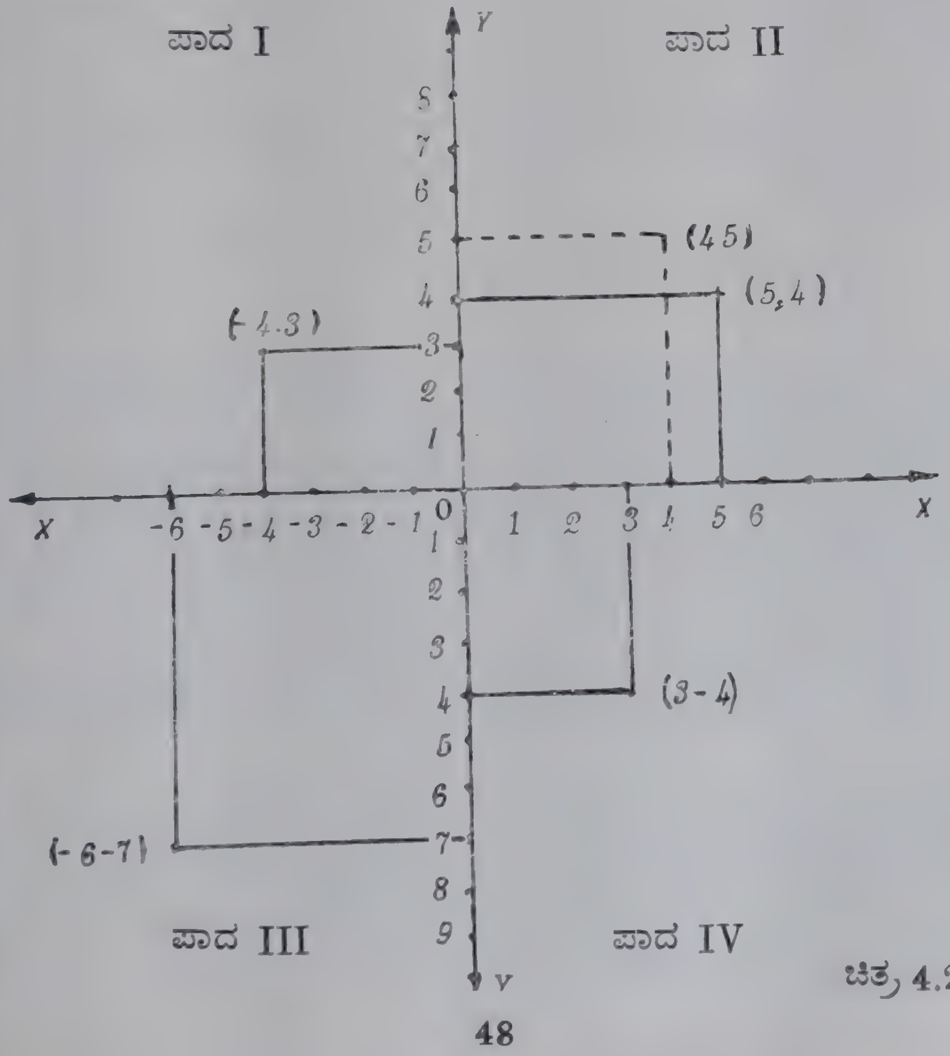


Fig. 4.2

ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಈ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ನಾವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದು Pಗೂ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು [(x, y) ಗಳನ್ನು] ಗೊತ್ತು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದೂ ಗಮನಾರ್ಹ.

X ಬಿಂದುವು ಮೂಲಬಿಂದು Oನ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೂ, Y ಬಿಂದುವು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ಇರುವಂತೆ ಅಡ್ಡರೇಖೆಯೊಂದನ್ನು x-ಅಕ್ಷವಾಗಿಯೂ ಊರ್ಧ್ವರೇಖೆಯೊಂದನ್ನು y–ಅಕ್ಷವಾಗಿಯೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ವಾಡಿಕೆಯಾಗಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 4·2 ನೋಡಿ) ಆದುದರಿಂದ, ಇನ್ನು ಮುಂದೆ, M ಬಿಂದುವು x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಧನವಾಗಿಯೂ, ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಋಣವಾಗಿಯೂ, xನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಹಾಗೆಯೇ N ಬಿಂದುವು y–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಧನವಾಗಿಯೂ, ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಋಣವಾಗಿಯೂ y ಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.



ಚಿತ್ರ 4.2

We observe that the two axes $X'X$ and $Y'Y$ divide th whole plane in to four parts called quadrants as in Fig. 4.2 and they are numbered in the counterclock wise order, the first quadrant being the one above the x-axi and to the right of the y-axis. In accordance to ou convention a table can be formed for ready reference o the signs of the coordinates of the points in various quad rants, as given below.

	quadrant I	quadrant II	quadrant III	quadrant IV
Sign of x	+	—	—	+
Sign of y	+	+	—	—

It is also to be noted that the order of mentioning th co-ord nates is important. The definitions of x and y show that the point (x, y) is different from the point (y, x) unless $x=y$. For example, we see that the point $(3, -4)$ is different from the point $(-4, 3)$. In fact, the firs one is in the IV quadrant and the second one is in the II quadrant. [For other illustrations see Fig. 4.2] Hence in the pair (x, y), the order of writing also plays a very important role. We call such pairs as **ordered pairs**

Thus, in conclusion, we may state that a point in a plane is represented by an ordered pair of numbers The signs of these numbers determine the quadrant in which a point lies. This forms the fundamental idea behind analytic geometry.

ಚಿತ್ರ (4·2)ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ $X'X$ ಮತ್ತು $Y'Y$ ಈ ಎರಡು ಅಕ್ಷಗಳು ಟ್ಟಿ ಸಮತಲವನ್ನು ಪಾದಗಳೆಂದು (Quadrants) ಕರೆಯಲಾಗುವ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗ ಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸುತ್ತವೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಪಾದವು x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲ್ಭಾಗಕ್ಕೂ y-ಅಕ್ಷದ ಲ ಭಾಗಕ್ಕೂ ಬರುವಂತೆ ಪಾದಗಳನ್ನು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆಯಾಗಿ ಅಂಕಿತಗೊಳಿಸುವುದು ಡಿಕೆಯಾಗಿದೆ. ಅದರಂತೆ ನಮ್ಮ ಸಂಕೇತಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ವಿವಿಧ ಪಾದಗಳಲ್ಲಿನ ಬಿಂದು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಪಟ್ಟಿಯೊಂದನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಪಡಿಸಬಹುದು.

	ಪಾದ I	ಪಾದ II	ಪಾದ III	ಪಾದ IV
-ನಿರ್ದೇಶಕದ ಚಿಹ್ನೆ	+	—	—	+
-ನಿರ್ದೇಶಕದ ಚಿಹ್ನೆ	+	+	—	—

ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಸಮೂದಿಸುವ ಕ್ರಮವೂ ಪ್ರಮುಖವಾದುದೆಂಬು ನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. $x=y$ ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ (x, y) ಬಿಂದುವು (y, x) ಬಿಂದುವಿ ಂತ ಬೇರೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದಾಗಿ x, y ಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ. ುದಾಹರಣೆಗೆ, (3, —4) ಬಿಂದುವು (—4, 3) ಬಿಂದುವಿಗಿಂತ ಬೇರೆಯಾಗಿದೆ ಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಮೊದಲನೆಯ ಬಿಂದುವು ಾಲ್ಕನೆಯ ಪಾದದಲ್ಲಿಯೂ ಎರಡನೆಯದು ಎರಡನೆಯ ಪಾದದಲ್ಲಿಯೂ ಇವೆ. ಇತರ ದೃಷ್ಟಾಂತಗಳಿಗೆ ಚಿತ್ರ 4·2 ನೋಡಿ). ಆದುದರಿಂದ (x, y) — ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮವೂ ಪ್ರಮುಖಪಾತ್ರ ವಹಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂತಹ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಜೊತೆಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಹೀಗೆ, ಉಪಸಂಹಾರವಾಗಿ, ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಒಂದು ಕ್ರಮಾನು ತ ಜೊತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ನಿರೂಪಿತವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವ ಪಾದದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಸುತ್ತವೆ. ಇದು ಬೀಜ ಗಣಿತದ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿನ ಮೂಲಭಾವನೆಯಾಗಿದೆ.

Exercises 4.1

1 Read off the co-ordinates of the points A B, C, E shown in the figure below :

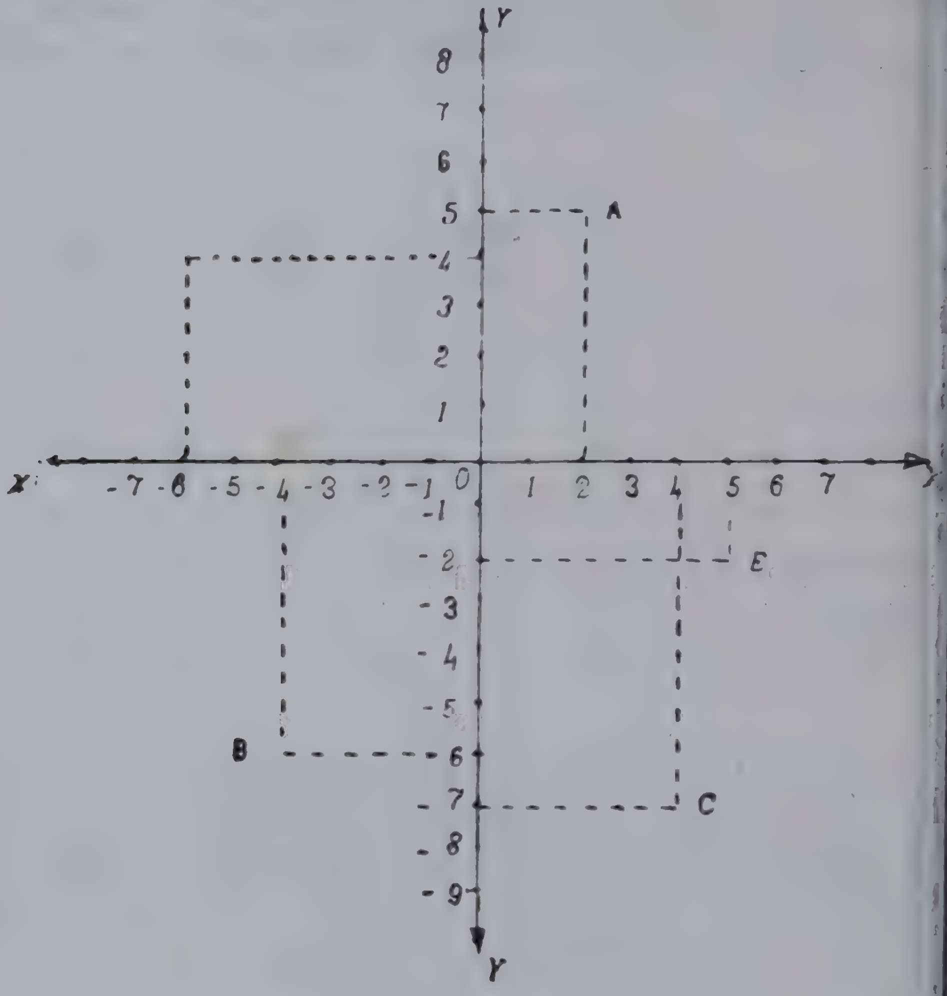


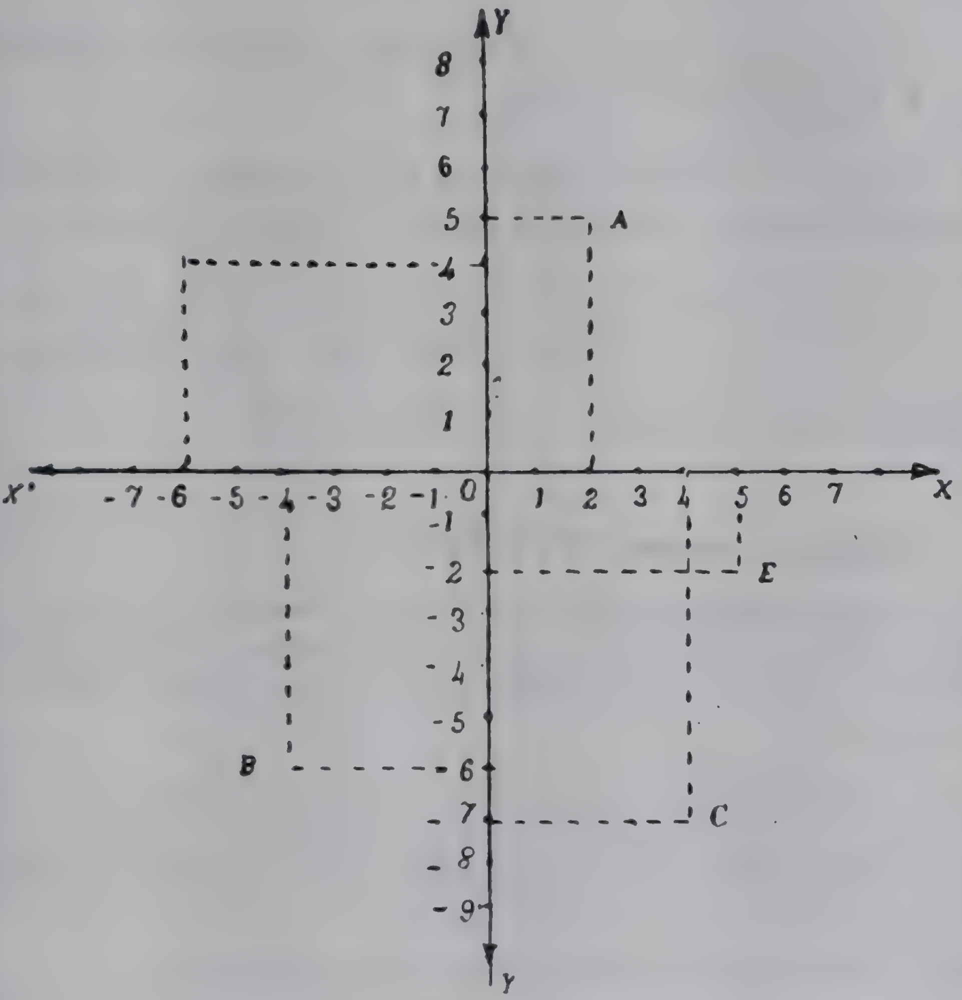
Fig 4.3

2 If p is a negative number and q a positive numb inwhich quadrant wil' each of the following points lie ?

(i) (p, q) (iv) $(-p, -q)$ (vii) $(q, -$
(ii) $(p, -q)$ (v) (q, p) (viii) $(-q, -$
(iii) $(-p, q)$ (vi) $(-q, p)$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 4.1

1 ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ A, B, C, D, E ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಓದಿ ಹೇಳಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 4.3

2 pಯು ಒಂದು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ, qಯು ಒಂದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಆದಾಗ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವ ಪಾದದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ?

(i) (p, q)	(iv) $(-p, -q)$	(vii) $(q, -p)$
(ii) $(p, -q)$	(v) (q, p)	(viii) $(-q, -p)$
(iii) $(-p, q)$	(vi) $(-q, p)$.	

3 Where do the points lie for which

(i) the x—co-ordinate is zero ;
(ii) the y—co-ordinate is zero ;
(iii) both the co-ordinates are zero.

4 Is there any point which does not lie in any quadrant ? Give examples if any.

5 Using a sheet of graph paper, establish a co-ordinate system on the plane and plot the following points :

(i) $A\ (-3,\ 2)$ (iii) $C\ (5,\ 2)$ (v) $E\ (-4,\ 0)$
(ii) $B\ (-1, -2)$ (iv) $D\ (0,\ 7)$ (vi) $O\ (0.\ 0)$

Measure the distances, AC, DE and OB.

4.2. Distance between Two Points—

If we know the co-ordinates of two points, we know how to plot them, and so the distance between them can be measured. Let us now find out how the distance can be calculated.

Let P and Q be two points (x_1, y_1) and (x_2, y_2). PL and QM be drawn perpendicular to the x—*axis* and PN and QR be drawn perpendicular to the y—*axis*. [See Fig. 4.4(*a*) and Fig 4.4 (*b*)]

Then from the definitions of x and y, we have

$$x_1 = \vec{OL} = \vec{NP}\ ; \qquad y_1 = \vec{ON} = \vec{LP}$$

$$x_2 = \vec{OM} = \vec{RQ} \quad \text{and} \quad y_2 = \vec{OR} = \vec{MQ}$$

so that $(x_2 - x_1) = \vec{LM}$ i.e. $LM = |\,x_2 - x_1\,|$

and $(y_2 - y_1) = \vec{NR}$ i.e. $NR = |\,y_2 - y_1\,|$

3 (i) x—ನಿರ್ದೇಶಕವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುವಂತಹ ;

(ii) y—ನಿರ್ದೇಶಕವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುವಂತಹ ;

ಮತ್ತು (iii) ಎರಡೂ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಶೂನ್ಯಗಳಾಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ಎಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ?

4 ಯಾವ ಪಾದದಲ್ಲಿಯೂ ಇರದಂತಹ ಬಿಂದುವಾವುದಾದರೂ ಇದೆಯೆ ? ಹಾಗಿದ್ದರೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ.

5 ಚೌಕಳಿಕಾಗದವೊಂದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ದೇಶನವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

(i) $A(-3, 2)$; (iii) $C(5, 2)$ (v) $E(-4, 0)$

(ii) $B(-1, -2)$; (iv) $D(0, 7)$ (vi) $O(0, 0)$.

AC, DE ಹಾಗೂ OBಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.

4.2. ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರ

ಬಿಂದುಗಳೆರಡರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ತಿಳಿದಿದ್ದಾಗ, ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಅಳತೆಮಾಡಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ದೂರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಿಂದ ಹೇಗೆ ತಿಳಿಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

P, Q ಗಳು $(x_1\ y_1)$ ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. PL ಮತ್ತು QM ಗಳನ್ನು x—ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ, PN ಮತ್ತು QRಗಳನ್ನು y—ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ ಲಂಬಗಳಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿರಲಿ. (ಚಿತ್ರ 4.5 (a) ಮತ್ತು 4.5 (b) ನೋಡಿ).

x, yಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳಿಂದ

$x_1 = \overrightarrow{OL} = \overrightarrow{NP}$ $\qquad y_1 = \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{LP}$

$x_2 = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{RQ}$ ಮತ್ತು $y_2 = \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{MQ}$ ಎಂದೂ

$x_2 - x_1 = \overrightarrow{LM}$ ಅಂದರೆ $LM = | x_2 - x_1 |$

$y_2 - y_1 = \overrightarrow{NR}$ ಅಂದರೆ $NR = | y_2 - y_1 |$

ಎಂದೂ ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ.

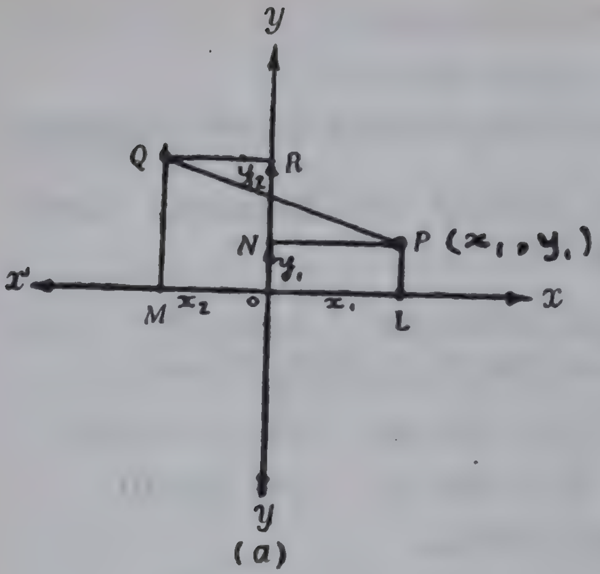


Fig. 4.4 (a)

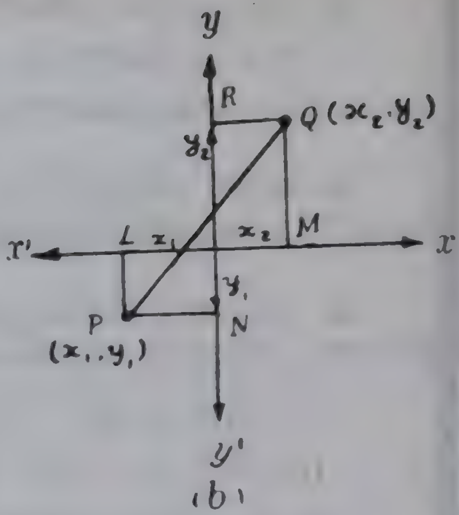


Fig. 4·4 (b)

From the theorem of Pythogoras it follows that

$$PQ^2 = ML^2 + NR^2$$

If $PQ = d$, we have

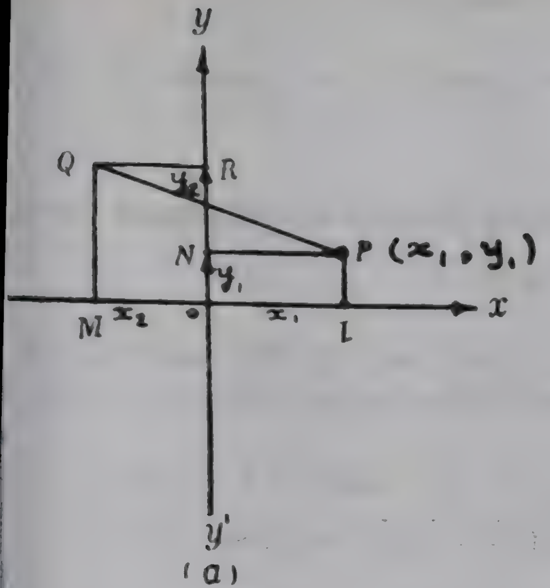
$$d^2 = | x_2 - x_1 |^2 + | y_2 - y_1 |^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

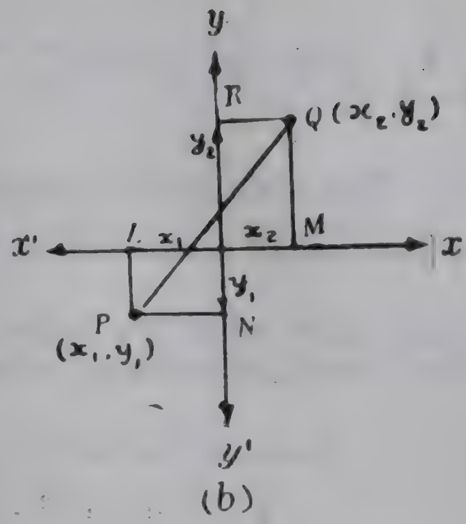
Since $d \geqslant 0$, we hav e

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Here we note that in deriving this formula we have not confined ourselves to points in a particular quadant or quadrants. Hence this formula holds good for any two points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) in the plane. We call this formula as the **distance formula.**

Corrolary : *Distance of any point* (x, y) *from the Origin is* $\sqrt{x^2 + y^2}$.





ಚಿತ್ರ. 4.4 (ಎ) ಚಿತ್ರ 4.4 (ಬಿ)

ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ

$PQ^2 = ML^2 + NR^2$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore$ $PQ = d$ ಆದರೆ, $d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$\geqslant 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಾವು ಯಾವೊಂದು ಪಾದ ಅಥವಾ ಪಾದಗಳಲ್ಲಿನ ಂದುಗಳಿಗೆ ಸೀಮಿತಗೊಂಡಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಆದುದರಿಂದ ಈ ೂತ್ರವು ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವೆರಡು ಬಿಂದುಗಳು (x_1, y_1), (x_2, y_2) ಗಳಿಗೂ ಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಾವು <u>ದೂರದ ಸೂತ್ರ</u>ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

<u>ಉಪಪ್ರಮೇಯ :</u> (x, y) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮೂಲಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರ

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

1 *Find the distance between the two points* (4, 3) ‹
(—2, 2).

The distance is, by substitution in the distance form
$\sqrt{[4-(-2)]^2+[3-2]^2} = \sqrt{37}$

2 *Show that the points* $(-3, 4)$, $(5, 2)$ *and* $(6, 1)$ *on the circumference of a circle whose centre is* $(-1, -5)$.

Distance between $(-3, 4)$ and $(-1, -5)$ is
$$\sqrt{[-3-(-1)]^2+[4-(-5)]^2} = \sqrt{85}$$

Similarly it can be verified that the distance betw
(5, 2) and $(-1, -5)$ and that between (6, 1) and (−1, -
are each $\sqrt{85}$.

$\therefore$ $\sqrt{85}$ is the radius of circle on which the gi
points lie.

3 *If A* (4, 5), *B* (−4, 5), *C* (−4, −1) *and D* (4, −
Show that ABCD is a rectangle.

It can be proved, by using the distance formula t
$AB=CD=8$ and $BC=AD=6$.

$\therefore$ $ABCD$ is a parallegogram.

Further, since $AC^2=AB^2+BC^2$, $ABCD$ is a rectan

4 *Find* x_1 *and* y_1 *such that* $A\ (x_1, y_1)$, $B\ (0, 0)$ ‹
$C\ (0, 2)$ *are the vertices of an equitatenal triangle.*

We have $AB^2=x_1^2+y_1^2$, $BC^2=4$
and $AC^2=x_1^2+(y_1-2)^2=x_1^2+y_1^2-4y_1+4$.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 (4, 3) ಮತ್ತು (—2,2) ಈ ಬಿಂದುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದೂರದ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, ದೂರವು $\sqrt{[4-(-2)]^2 + [3-2]^2} = \sqrt{37}$ ಎಂದು ತಿಳಿದು ಬರುವುದು.

2 (—3, 4), (5,2) ಮತ್ತು (6, 1) ಬಿಂದುಗಳು (—1, —5) ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲಿರುವುವು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(—3, 4) ಮತ್ತು (—1, —5) ಗಳಿಗಿರುವ ದೂರ

$$\sqrt{[-3-(-1)]^2+[4-(-5)]^2} = \sqrt{85}.$$

ಹಾಗೆಯೇ (5, 2) ಮತ್ತು (—1, —5) ಗಳಿಗಿರುವ ಮತ್ತು (6, 1) ಮತ್ತು (—1, —5) ದೂರಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ $\sqrt{85}$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತಾಳೆನೋಡಬಹುದು.

∴ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು $\sqrt{85}$ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಪರಧಿಯ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ.

3 A (4, 5), B (—4, 5), C (—4, —1) ಮತ್ತು D (4, —1) ಆದಾಗ $ABCD$ಯು ಒಂದು ಆಯವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

ದೂರದ ಸೂತ್ರದಿಂದ $AB=CD=8$ ಮತ್ತು $BC=AD=6$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

∴ $ABCD$ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $ABCD$ ಒಂದು ಆಯವಾಗುತ್ತದೆ.

4 A (x_1, y_1), B (0, 0) ಮತ್ತು C (0, 2) ಬಿಂದುಗಳು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವೊಂದರ ಶೃಂಗಗಳಾಗುವಂತೆ x_1 ಮತ್ತು y_1 ಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

$$AB^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad BC^2 = 4$$

ಮತ್ತು $AC^2 = x_1^2 + (y_1 - 2)^2 = x_1^2 + y_1^2 - 4y_1 + 4$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

Since $AB^2 = BC^2$ and $AC^2 = AB^2$ we have

$$x_1^2 + y_1^2 = 4$$

and $x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 - 4y_1 + 4$ or $y_1 = 1$ (1

(1) and (2) give $x_1 = \pm\sqrt{3}$ and $y_1 = 1$. (2)

5 *If* (2, 1) *and* (−1, 2) *be a pair of opposite vertices of a square, find the other pair.*

If $ABCD$ be the given square, let $A \equiv (2, 1)$ and $C \equiv (-1, 2)$. Let $B \equiv (x_1, y_1)$

If we use $AC^2 = AB^2 + BC^2$ and $AB = BC$,

we obtain two solutions for (x_1, y_1). *viz.*, (0, 0) and (1, 3). One of these is B and the other is D.

Exercises 4·2

1 Derive a formula for the distance between

(i) (x_1, k) and (x_2, k)
(ii) (k, y_1) and (k, y_2)

2 Use the distance formula to compute the distance between the pairs of points whose co-ordinates are listed below.

(i) (0, 2) and (−2, 0)
(ii) (8, 7) and (8, −6)
(iii) $(a+b, a-b)$ and $(b-a, b+a)$.
(iv) $(at_1^2, 2at_1)$ and $(at_2^2, 2at_2)$.
(v) $(a \cos\theta, a \sin\theta)$ and $(a \cos\phi, a \sin\phi)$.

3 The co-ordinates of the end points of a diameter of a circle are (3, 1) and (−2, 5). What is the length of the radius of this circle?

4 Prove that $B(-2, 5)$ is between $A(-5, -1)$ and $C(1, 11)$. [*Hint*: Prove that $AB + BC = AC$]. Then prove that B is half way between A and C. (Remember: a drawing does not constitute a proof !)

$AB^2 = BC^2$ ಮತ್ತು $AC^2 = AB^2$ ಆಗಿರಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$x_1^2 + y_1^2 = 4 \ldots \quad (1)$$

ಮತ್ತು $x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 - 4y_1 + 4$ ಅಥವಾ $y_1 = 1 \ldots$ (2)

ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ $x_1 = \pm \sqrt{3}$ ಮತ್ತು $y_1 = 1$ ಎಂದು ಬರುತ್ತದೆ.

5 (2, 1) ಮತ್ತು (—1, 2) ಗಳು ಚೌಕವೊಂದರ ಅಭಿಮುಖ ಶೃಂಗದ್ವಯ ...ದರೆ ಉಳಿದ ಬಿಂದುದ್ವಯವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚೌಕವು $ABCD$ ಆದರೆ $A \equiv (2, 1)$ ಮತ್ತು $C \equiv (-1, 2)$ ...ರಲಿ. $B \equiv (x_1, y_1)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ಮತ್ತು $AB = BC$ ಇವುಗಳನ್ನು ...ಪಯೋಗಿಸಿದರೆ, (x_1, y_1) ಗಳಿಗೆ (0, 0) ಮತ್ತು (1, 3) ಎಂಬ ಎರಡು ಬೆಲೆ ...ು ಬರುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು Bಯೂ ಮತ್ತೊಂದು Dಯೂ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 4.2

1 (i) (x_1, k) ಮತ್ತು (x_2, k)

(ii) (k, y_1) ಮತ್ತು (k, y_2) ಗಳಿಗಿರುವ ದೂರದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ...ಕೆಯಿರಿ.

2 ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುದ್ವಯುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ...ಿಯಲು ದೂರದ ಸೂತ್ರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ.

(i) (0, 2) ಮತ್ತು (—2, 0)

(ii) (8, 7) ಮತ್ತು (8, —6)

(iii) $(a+b, a-b)$ ಮತ್ತು $(b-a, b+a)$.

(iv) $(at_1^2, 2at_1)$ ಮತ್ತು $(at_2^2, 2at_2)$.

(v) $(a \cos\theta, a \sin\theta)$ ಮತ್ತು $(a \cos\phi, a \sin\phi)$

3 (3, 1) ಮತ್ತು (—2, 5)ಗಳು ವೃತ್ತವೊಂದರ ವ್ಯಾಸದ ಕೊನೆಯ ...ದುಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಉದ್ದವೆಷ್ಟಾಗಿರುವುದು ?

4 $B(-2, 5)$ಯು $A(-5, -1)$ ಮತ್ತು $C(1, 11)$ಗಳ ನಡುವೆ ...ದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. [ಸೂಚನೆ: $AB+BC=AC$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ]. ...ನಂತರ Bಯು AC ಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವೆಂದು ತೋರಿಸಿ. (ಚಿತ್ರವೊಂದು ...ಧನೆಯಾಗಲಾರದೆಂಬುದು ಗಮನದಲ್ಲಿರಲಿ!)

5 If $P\ (x,\ y)$ is equidistant from $A\ (2,\ -3)$ ar
$B\ (-5,\ -7)$, show that $6x+8y+37=0$.

6 Show that (4, 3) is the circumcentre of the triang
whose vertices are (1, 7), (7, −1) and (8, 6).

7 Show that the points.

(i) (1, 1), (−1, −1) and $(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

(ii) (1, 0), $(2,\ \sqrt{3})$ and (3, 0)

(iii) (0, 0), (4, 0) and $(2,\ 2\sqrt{3})$

form the vertices of an equilateral triangle.

8 Show that the points

(i) (0, 1), (−2, −2) and (−2, 4)

(ii) (2, 8), (10, 11) and (5, 0)

(iii) (6, −5), (2, −4), and (5, −1)

are the vertices of an isosceles triangle.

9 Show that the points

(i) (0, 0), $(a,\ a)$, $(3a,\ -3a)$

(ii) (−1, 1), (−2, −6), (−5, −2)

(iii) (0, 2), (1, 0), (3, 1)

form the vertices of a right angled triangle.

Which of these are isosceles ?

10 Show that the points (3, —2), (—2, 3), (5, 5) ar
(—4, —4) form a rhombus whereas the points (2, 1
(4, 3), (2, 5) and (0, 3) form a square.

11 Show that the points (−2, −2), (−1,
(8, 6) and (7, 2) form a parallelogram whereas the poin
(0, 2), (1, 1), (4, 4) and (3, 5) form a rectangle.

5 $P(x, y)$ಯು $A(2, -3)$ ಮತ್ತು $B(-5, -7)$ ಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ೂರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $6x+8y+37=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6 (1, 7), (7, —1) ಮತ್ತು (8, 6) ಬಿಂದುಗಳು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವ ್ರಭುಜದ ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವು (4, 3) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7 (i) (1, 1), (—1, —1) ಮತ್ತು $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

(ii) (1, 0), $(2, \sqrt{3})$ ಮತ್ತು (3, 0)

(iii) (0, 0), (4, 0) ಮತ್ತು $(2, 2\sqrt{3})$

ಳು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವೊಂದರ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವುವು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8 (i) (0, 1), (—2, —2) ಮತ್ತು (—2, 4)

(ii) (2, 8), (10, 11) ಮತ್ತು (5, 0)

(iii) (6, —5), (2,—4) ಮತ್ತು (5,—1)

ಗಳು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವುವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

9 (i) (0, 0), (a, a), $(3a, -3a)$

(ii) (—1, 1), (—2, —6), (—5, —2)

(iii) (0, 2), (1, 0), (3, 1)

ಗಳು ಒಂದು ಲಂಬಕೋಣ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿರುವುವು ?

10 (3, —2), (—2, 3), (5, 5) ಮತ್ತು (—4, —4)ಗಳು ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವುವೆಂದೂ (2, 1), (4, 3), (2, 5) ಮತ್ತು (0, 3)ಗಳು ಚೌಕವೊಂದರ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವುವೆಂದೂ ತೋರಿಸಿ.

11 (—2, —2), (—1, 2), (8, 6) ಮತ್ತು (7, 2)ಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೊಂದರ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವುವೆಂದೂ (0, 2), (1, 1), (4, 4) ಮತ್ತು (3, 5) ಬಿಂದುಗಳು ಆಯತವೊಂದರ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವುವೆಂದೂ ತೋರಿಸಿ.

12 If a point P is on the line parallel to the x-a
and 4 units above, and if the distance between P a
(4, 7) is 5, find the coordinates of P.

13 A point P known to be equidistant from t
points (1, —2) and (—2, 3). If the distance of P from t
origin is 4, find its coordinates.

14 Find the condition to be satisfied by the coordinat
of the points $P\ (x_1, y_1)$ and $Q\ (x_2, y_2)$ in order that t
line segment PQ shall subtend a right angle at the origin

15 Three vertices of a rectangle are (0, 0), (0, 2) a
(3, 0). Find the fourth vertex.

4.3 Division of a Line Segment—

Let P and Q determine a line and let R be a point on th

line such that $\dfrac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = r$. Then we say that R divides t

line segment PQ in the ratio $r : 1$

We note that r is positive if $\overrightarrow{PR}$ and $\overrightarrow{RQ}$ have sa
signs, in which case, we say that R is a **point of intern
division** and r is negative if $\overrightarrow{PR}$ and $\overrightarrow{RQ}$ have opposi
signs, in which case, we say that R is a **point of extern
division.**

Let the points P, Q and R be (x_1, y_1), (x_2, y_2) and $(x',$
w.r.t. a co-ordinate system. Let PA, QB, RC be drav
perpendicular to the x-axis and PD, QE and RF be drav
perpendicular to the y-axis. (See Fig. 4.5)

12 P ಬಿಂದುವು x—ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ 4 ಮಾನಗಳ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಹಾಗೂ P ಮತ್ತು (4, 7) ಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವು 5 ಆದರೆ, P ಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13 P ಬಿಂದುವು (1,—2) ಮತ್ತು (—2, 3) ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವುದಾಗಿ ತಿಳಿದುಬಂದಿದೆ. ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ Pಗೆ ಇರುವ ದೂರ 4 ಆದರೆ, ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14 PQ ರೇಖಾಭಾಗವು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಮಕೋನವನ್ನೇರ್ಪಡಿಸಲು $P(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $(x_2\ y_2)$ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಸಿದ್ಧಿಸಬೇಕಾದ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

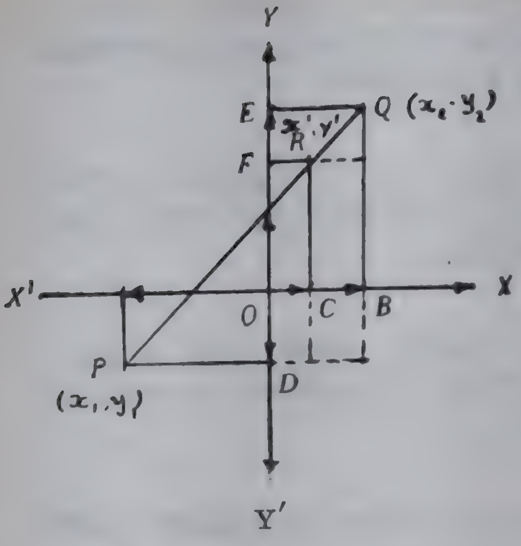
15 (0, 0), (0, 2) ಮತ್ತು (3, 0) ಬಿಂದುಗಳು ಆಯವೊಂದರ ಮೂರು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿವೆ. ನಾಲ್ಕನೆಯ ಶೃಂಗವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

4.3 ರೇಖಾಭಾಗವೊಂದರ ವಿಭಜನೆ

P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳು ರೇಖೆಯೊಂದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿ ಮತ್ತು ಈ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ R ಎನ್ನುವುದು $\dfrac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = r$ ಆಗುವಂತಹ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ನಾವು R ಬಿಂದುವು PQ ರೇಖಾಭಾಗವನ್ನು $r : 1$ ರ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ, $\overrightarrow{PR}$ ಮತ್ತ $\overrightarrow{RQ}$ ಗಳೆರಡರ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಒಂದೇ ಆದಾಗ r ಧನವಾಗಿರುವುದೆಂದೂ, $\overrightarrow{PR}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{RQ}$ ಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವಿಭಿನ್ನವಾದಾಗ r ಋಣವಾಗಿರುವುದೆಂದೂ ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ R ಬಿಂದುವನ್ನು ಅಂತರೀಯ ವಿಭಜನಾಬಿಂದು ವೆಂದೂ ಎರಡನೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಬಾಹ್ಯವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$P, Q, R,$ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ನಿರ್ದೇಶನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ಮತ್ತು (x', y') ಗಳಾಗಿರಲಿ. PA, QB, RC ಗಳನ್ನು x- ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ, PD, QE, RF ಗಳನ್ನು y- ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ ಲಂಬಗಳಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 4.5 ನೋಡಿ.)



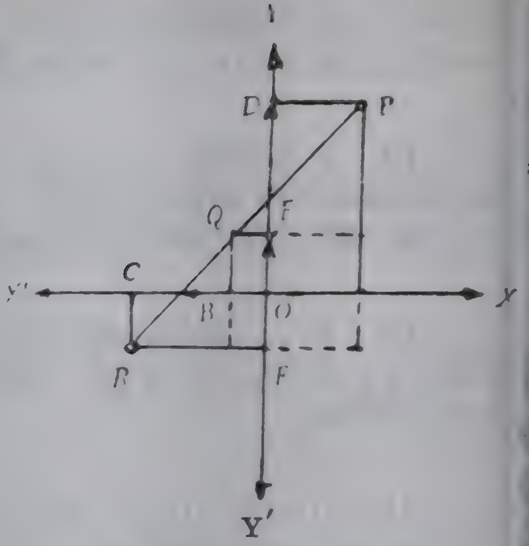


Fig. 4·5 (*a*) $r>0$ Fig. 4·5 (*b*) $r<0$

Then, we have

$$x_1=\overrightarrow{OA}, \qquad y_1=\overrightarrow{OD}$$
$$x_2=\overrightarrow{OB}, \qquad y_2=\overrightarrow{OE}$$
$$x_1=\overrightarrow{OC}, \qquad y_1=\overrightarrow{OF}$$

$$\therefore \; x'-x_1=\overrightarrow{AC} \; ; \qquad x'-x_2=\overrightarrow{BC}$$
$$y'-y_1=DF \; ; \qquad y'-y_2=EF$$

Now (making necessary constructions), we have from geometry

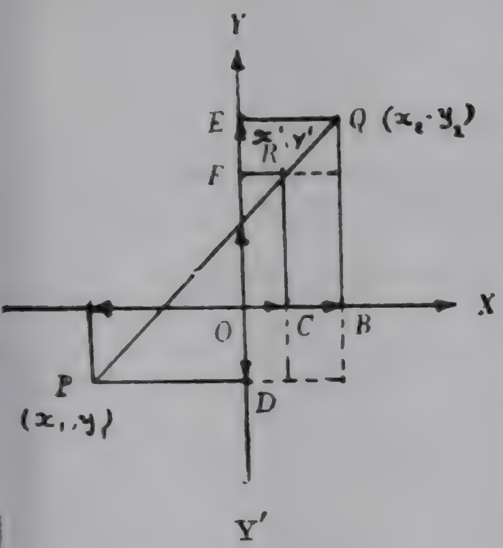
$$\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{\overrightarrow{DF}}{\overrightarrow{FE}}$$

$$\therefore \quad r=\frac{x'-x'}{x_2-x'} \quad (\because \overrightarrow{BC}=x'-x_2)$$

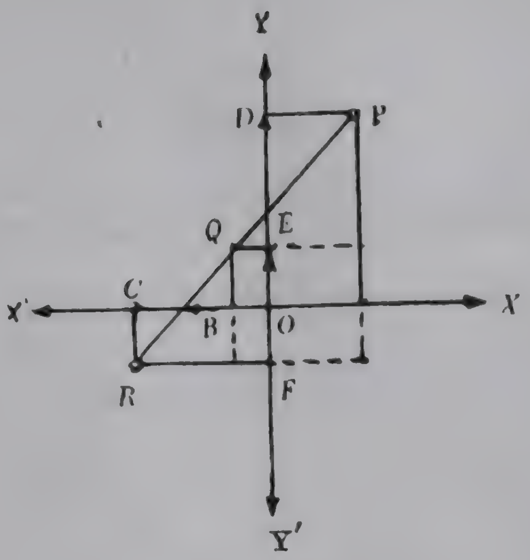
and $r=\dfrac{y'-y'}{y_2-y'}$ $(\because \overrightarrow{EF}=y'-y_2)$

Solving, we get $x'=\dfrac{x_1r+x_2}{1+r}$

and $y'=\dfrac{y_1+r\;y_2}{1+r}$



ಚಿತ್ರ 4.5 (a) $r>0$



ಚಿತ್ರ 4.5(b) $r<0$

ಆಗ, $x_1=\overrightarrow{OA}$, $y_1=\overrightarrow{OD}$

$x_2=\overrightarrow{OB}$, $y_2=\overrightarrow{OE}$

$x'=\overrightarrow{OC}$, $y'=\overrightarrow{OF}$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad x'-x_1 = \overrightarrow{AC};\ x'-x_2 = \overrightarrow{BC},$$
$$y'-y_1 = EF;\ y'-y_2 = EF.$$

ಈಗ, (ಆವಶ್ಯಕ ರಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ), ರೇಖಾಗಣಿತವು

$$\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{\overrightarrow{DF}}{\overrightarrow{FE}}$$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ

$$\therefore r=\frac{x'-x_1}{x_2-x'}\left(\because \overrightarrow{BC}=x'-x_2\right)$$ ಮತ್ತು

$$r=\frac{y'-y_1}{y_2-y'}\left(\because \overrightarrow{EF}=y'-y_2\right).$$

ಬಿಡಿಸಿದಾಗ $x'=\dfrac{x_1+rx_2}{1+r}$; $y'=\dfrac{y_1+ry_2}{1+r}$ ಎಂದು ಬರುತ್ತದೆ.

Thus the point which divides the directed line segment fro
(x_1, y_1) to (x_2, y_2) in the ratio r : 1 is

$$\left[\frac{x_1+rx_2}{1+r}, \frac{y_1+ry_2}{1+r}\right]$$

Note: If we take the ratio of division as $m : n, (m > 0, n >$

then $r = \frac{m}{n}$ if the division is internal and $r = -\frac{m}{n}$ if t
division is external. In such a case the point of intern
division and the point of external division are respectiv
given by $\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}; \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$ and $\left(\frac{nx_1-mx_2}{-m+r}, \frac{ny_1-m}{-m+}\right.$

Corrolary: If R is taken as the middle point we hav
$\vec{PR} = \vec{RQ}$ of PQ so that $r = \frac{m}{n} = 1$.

$\therefore$ *The middle point of the line joining* (x_1, y_1) an
(x_2, y_2) *is*

$$\left[\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right]$$

Examples

1 *Find the co-ordinates of the points of trisection of*
line joining the points (1,—2) *and* (—3, 4)

There are two points of trisection of the line segme
from (1,—2) to (—3, 4). For one point $r = \frac{1}{2}$ and for t
other $r = 2$ (why ?)

$\therefore$ The point for which $r = \frac{1}{2}$ is
[using the formula],

$$\left[\frac{1+\frac{1}{2}(-3)}{1+\frac{1}{2}}, \frac{-2+\frac{1}{2}.4}{1+\frac{1}{2}}\right] \quad i.e.\ [-\tfrac{1}{3}, 0]$$

Similarly the other point is $\left[\frac{-5}{3}, \frac{6}{3}\right]$

ಹೀಗೆ, (x_1, y_1) ನಿಂದ (x_2, y_2) ವರೆಗಿರುವ ನಿರ್ದೇಶಿತ ರೇಖಾಭಾಗವನ್ನು $r : 1$ ರ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವು

$$\left[\frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \right]$$ ಆಗಿರುವುದು.

ಸೂಚನೆ : ವಿಭಜನಾ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು $m : n$ $(m > 0, n > 0)$ ಎಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡರೆ, ವಿಭಜನೆಯು ಅಂತರೀಯವಾದಾಗ $r = \frac{m}{n}$ ಮತ್ತು ವಿಭಜನೆಯು ಬಾಹ್ಯ ವಾದಾಗ $r = \frac{m}{n}$. ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅಂತರೀಯ ಹಾಗೂ ಬಾಹ ವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

$$\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \frac{ny_1 + my_2}{m + n} \right) \left(\frac{nx_1 - mx_2}{-m+n}, \frac{ny_1 - my_2}{-m+n} \right)$$

ಆಗಿರುವುವು.

ಉಪಪ್ರಮೇಯ : R ಬಿಂದುವನ್ನು PQನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{RQ}$ ಆಗಿ $r = \frac{m}{n} = 1$ ಆಗುವುದು.

$\therefore$ $(x_1 y_1)$ ಮತ್ತು $(x_2 y_2)$ ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಭಾಗದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು

$$\left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right]$$ ಆಗಿರುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 (1, —2) ಮತ್ತು (—3, 4) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ತ್ರಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

(1, —2) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ (—3, 4) ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಭಾಗ ವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ತ್ರಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ $r = \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದಕ್ಕೆ $r = 2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. (ಏಕೆ ?)

$\therefore$ $r = \frac{1}{2}$ ಆಗಿರುವಂತಹ ಬಿಂದುವು (ಸೂತ್ರದಿಂದ)

$$\left[\frac{1 + \frac{1}{2}(-3)}{1 + \frac{1}{2}}, \frac{-2 + \frac{1}{2} \cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} \right].$$ ಅಂದರೆ $[-\frac{1}{3}, 0]$.

ಹೀಗೆಯೇ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವು $\left[-\frac{5}{3}, \frac{6}{3} \right]$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

2 *If* (2, 1), (—1, —3), (4, 5) *are the middle points of the sides of a triangle, find the vertices of the triangle.*

Let ABC be the given triangle and L, M, N be the middle points of BC, CA and AB respectively.

Let $L \equiv (2, 1)$, $M \equiv (-1, -3)$ and $N \equiv (4, 5)$

Let $A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ and $C \equiv (x_3, y_3)$.

By hypothesis, we have

$$L \equiv (2, 1) \equiv \left(\frac{x_2+x_3}{2}, \ \frac{y_2+y_3}{2} \right)$$

$$M \equiv (-1, -3) \equiv \left(\frac{x_3+x_1}{2}, \ \frac{y_3+y_1}{2} \right)$$

$$N \equiv (4, 5) \equiv \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \ \frac{y_1+y_2}{2} \right)$$

so that $x_2+x_3=4$; $y_2+y_3=2$

$x_3+x_1=-2$; $y_3+y_1=-6$

$x_1+x_2=8$; $y_1+y_2=10$

Solving, we get $x_1=1$; $x_2=7$, $x_3=-3$

$y_1=1$; $y_2=9$, $y_3=-7$

Hence the required points are

(1, 1), (7, 9) and (—3, —7).

2 (2, 1), (—1, —3) ಮತ್ತು (4, 5) ಬಿಂದುಗಳು ತ್ರಿಭುಜವೊಂದರ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ತ್ರಿಭುಜವು ABC ಆಗಿಯೂ BC, CA, ABಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು L, M, Nಗಳೂ ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ $L \equiv (2, 1)$, $M \equiv (-1, -3)$ ಮತ್ತು $N \equiv (4, 5)$ ಆಗಿರಲಿ. $A \equiv (x_1, y_1)$ $B \equiv (x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C \equiv (x_3, y_3)$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ದತ್ತದ ಪ್ರಕಾರ

$$L \equiv (2, 1) \equiv \left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

$$M \equiv (-1, -3) \equiv \left(\frac{x_3+x_1}{2}, \frac{y_3+y_1}{2}\right)$$

$$N \equiv (4, 5) \equiv \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$ ಆಗಿರುವುದು.

ಆಗ, $x_2+x_3=4$; $y_2+y_3=2$

$x_3+x_1=-2$; $y_3+y_1=-6$

$x_1+x_2=8$; $y_1+y_2=10$

ಬಿಡಿಸಿದರೆ $x_1=1$, $x_2=7$; $x_3=-3$

$y_1=1$, $y_2=9$; $y_3=-7$. ಎಂದು ಬರುವುದು.

$\therefore$ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು

(1, 1) (7, 9) ಮತ್ತು (—3, —7) ಆಗಿರುವುವು.

3 *Find the co-ordinates of the centroid of the triangle whose vertices are* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *and* (x_3, y_3).

Let $A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ and $C \equiv (x_3, y_3)$

Let D be the middle point of BC. Then

$$D \equiv \left[\frac{x_2+x_3}{2}, \quad \frac{y_2+y_3}{2}\right]$$

If G is the centroid, it lies on AD such that

$$\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GD}} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore\ G \equiv \left[\frac{x_1+2.\ \frac{1}{2}(x_2+x_3)}{1+2}, \frac{y_1+2.\ \frac{1}{2}(y_2+y_3)}{1+2}\right]$$

$$\equiv \left[\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right]$$

4 *In a triangle ABC, if CM is a median then prov analytically* (i.e., *using the methods of analytic geometry*) *tha*

$$AC^2+BC^2 = \tfrac{1}{2}AB^2+2MC^2.$$

Let us choose the co-ordinate axes as given below so that the algebraic computations become easy.

x—*axis* is taken along the side AB of the triangl ABC with the origin at M, the midpoint of AB. Naturall y—*axis* will be a line perpendicular to AB through M.

With respect to these axes let $A = (x_1, 0)$

Then naturally $B \equiv (-x_1, 0)$ and $M = (0, 0)$

3 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)ಗಳು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

$A \equiv (x_1, y_1)$; $B \equiv (x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C \equiv (x_3, y_3)$ ಆಗಿರಲಿ. Dಯು BC ಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$D \equiv \left[\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right]$$ ಆಗಿರುವುದು.

ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರವು G ಆದರೆ, ಅದು AD ಯ ಮೇಲೆ

$$\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GD}} = \frac{2}{1}$$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಇರುವುದು.

$$\therefore G \equiv \left[\frac{x_1 + 2\cdot\frac{1}{2}(x_2 + x_3)}{1 + 2}, \frac{y_1 + 2\cdot\frac{1}{2}(y_2 + y_3)}{1 + 2}\right]$$

$$\equiv \left[\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right]$$

4 ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ CM ಒಂದು ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಯಾದರೆ ಬೀಜ ರೇಖಾ ಗಣಿತದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$$AC^2 + BC^2 = \tfrac{1}{2} AB^2 + 2\, MC^2$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಬೀಜ ಗಣಿತದ ಪ್ರಯೋಗವು ಸುಲಭವಾಗುವಂತೆ ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ABC ತ್ರಿಭುಜದ AB ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ ABಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು Mವು ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗುವಂತೆ x—ಅಕ್ಷವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಸಹಜವಾಗಿ y—ಅಕ್ಷವು ABಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ M ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯಾಗುವುದು.

ಈ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ $A \equiv (x_1, 0)$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಸಹಜವಾಗಿ $B \equiv (-x_1, 0)$ ಮತ್ತು $M \equiv (0, 0)$ ಆಗುವುದು.

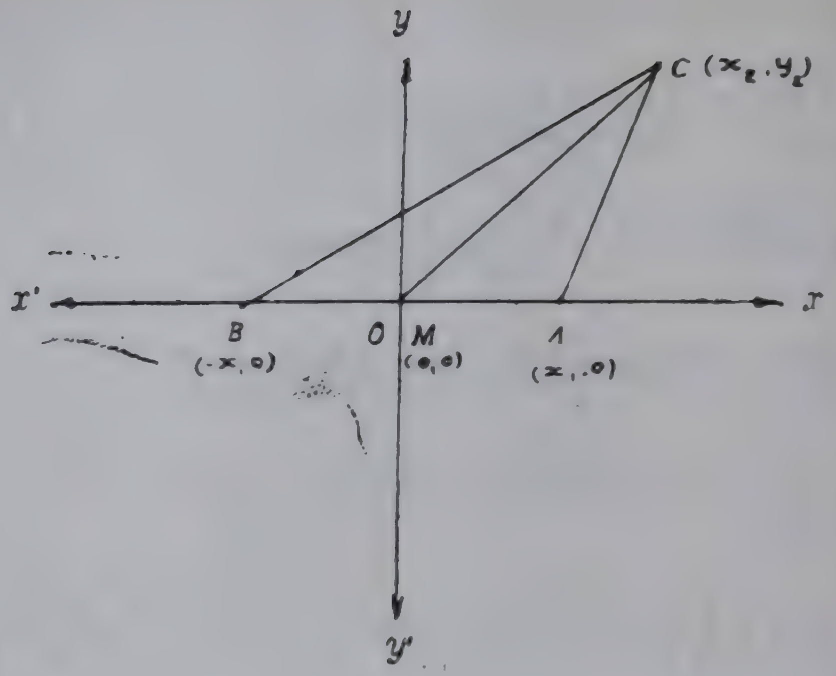


Fig. 4.6

Also let $C = (x_2, y_2)$.

Then $AB^2 = 4x_1^2$, $BC^2 = (x_2+x_1)^2+y_2^2$

$$CA^2 = (x_2-x_1)^2+y_2^2 \text{ and } CM^2 = x_2^2+y_2^2$$

The required result follows from this immediately.

5 *Prove analytically that the line segment join[ing] the middle points of the diagonals of a trapezoid is eq[ual] in length to half the difference of their lengths.*

Choose the *x—axis* along one of the parallel li[nes] say AB with the origin at one end point A.

y-axis will be perpendicular to this side through A

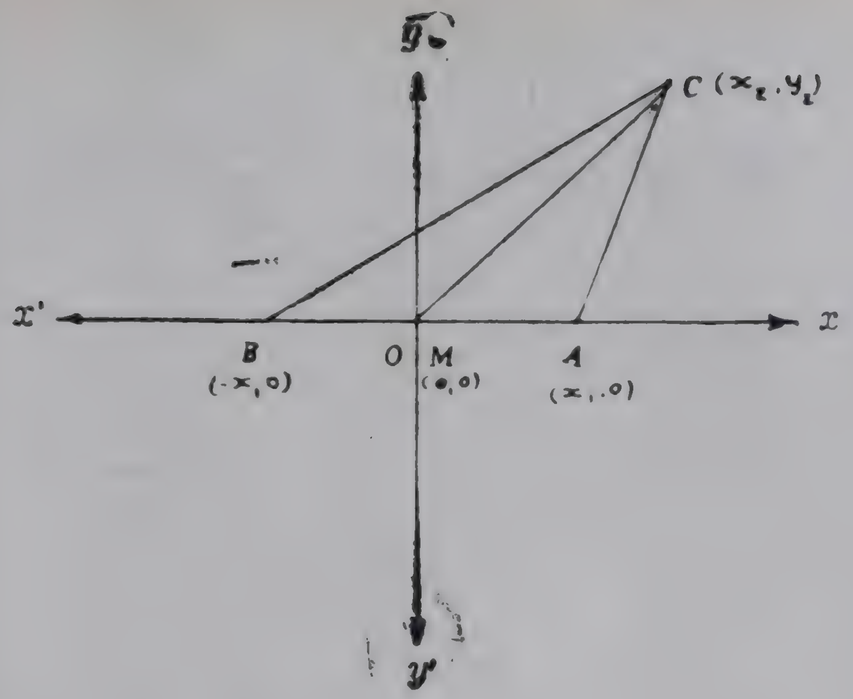


Fig 4.6

$C \equiv (x_2, y_2)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ $AB^2 = 4x_1^2$, $BC^2 = (x_2 + x_1)^2 + y_2^2$

$CA^2 = (x_2 - x_1)^2 + y_2^2$ ಮತ್ತು $CM^2 = x^2 + y^2$ ಆಗುವುದು.

ಸಾಧನೀಯವು ಇದರಿಂದ ತಕ್ಷಣ ಬರುವುದು.

5 ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ಕರ್ಣಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಭಾಗವು ಅವುಗಳ ಉದ್ದಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುವುದು ಎಂದು ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತದ ಮೂಲಕ ಸಾಧಿಸಿ.

x—ಅಕ್ಷವನ್ನು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿನ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿನ ಒಂದರ ಮೇಲೆ, (ಉದಾಹರಣೆಗೆ AB ಎನ್ನುವುದರ ಮೇಲೆ) ಒಂದು ತುದಿ A ಯು ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗುವಂತೆ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಆಗ y—ಅಕ್ಷವು A ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಲಂಬರೇಖೆಯಾಗುವುದು.

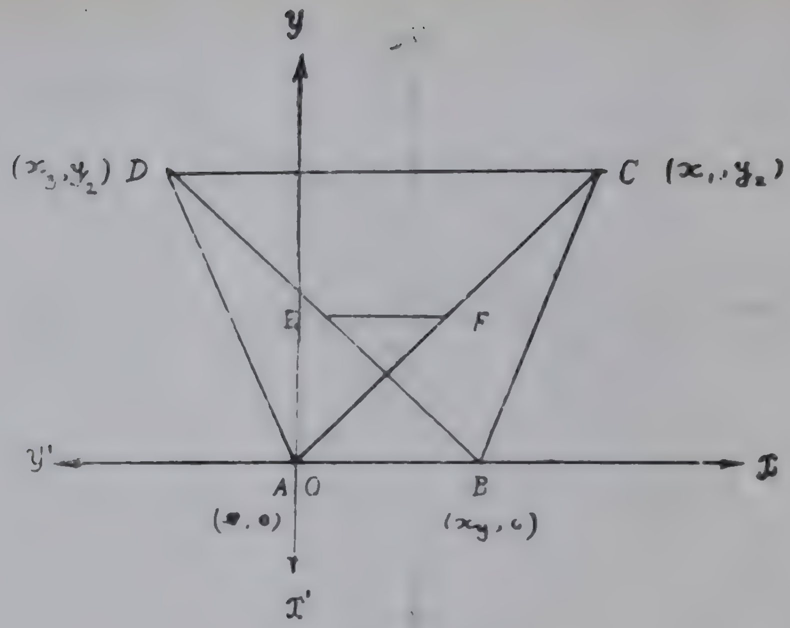


Fig. 4.7

Let $B=(x_1, 0)$; $C=(x_2, y_2)$ $D=(x_3, y_2)$ (why ?) Naturally $A=(0, 0)$.

Let E and F be the mid-points of BD and AC respectively.

Now, it is easy to prove that

$$EF = \frac{1}{2}[AC - BD]$$

which is the required result.

Exercises 4.3

1 Determine the co-ordinates of the mid-points of the lines joining the following sets of points.

(i) (3, 4) and (5, 2) (ii) (2, 6) and (−1, 0)
(iii) (8, −6) and (4, −8) (iv) (0, 0) and (−2, −3)
(v) (4, −1) and (−2, 3 (vi) (−1, −2) and (−3. −4)

2 Find the co-ordinates of the point which divides the segment from P to Q in the ratio $r : 1$

if (i) $P\equiv(0, 0)$, $Q\equiv(1, -1)$, $r=2$
(ii) $P\equiv(1, 1)$, $Q\equiv(2, -4)$, $r=-\frac{1}{2}$
(iii) $P\equiv(-1, -2)$, $Q\equiv(-2, -1)$, $r=\frac{1}{3}$

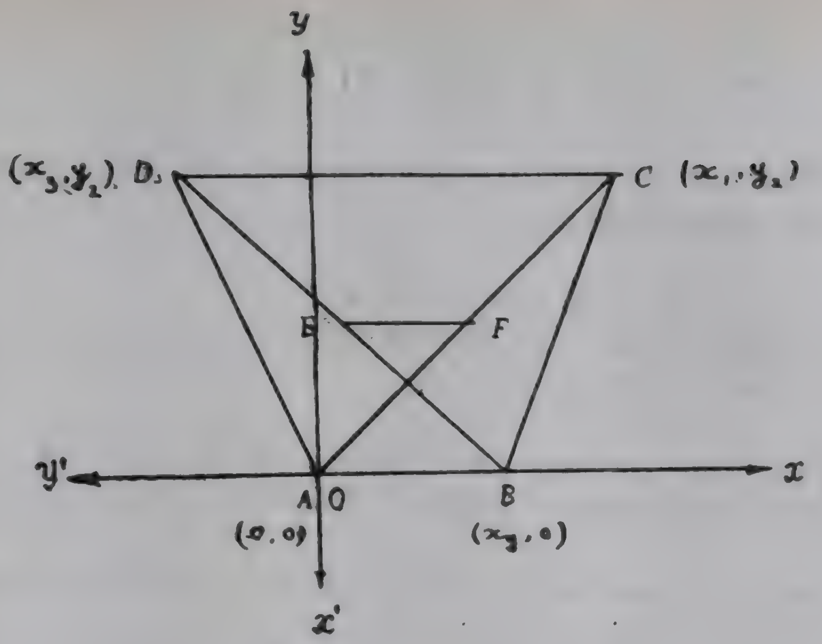


Fig. 4.8

ಈಗ $B=(x_1, o)$; $C=(x_2, y_2)$, $D=(x_3, y_2)$ ಆಗಿರಲಿ. ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿ $A\equiv(o, o)$ ಆಗಿರುವುದು.

E ಮತ್ತು F ಗಳು BD ಮತ್ತು AC ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ $EF=\frac{1}{2}[AC-BD]$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 4·3

1 ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಬಿಂದುದ್ವಯಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾ ಭಾಗಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) (3, 4) ಮತ್ತು (5, 2) (iv) (0, 0) ಮತ್ತು (—2,—3)
(ii) (2, 6) ಮತ್ತು (—1, 0) (v) (4,—1) ಮತ್ತು (—2, 3)
(iii) (8,—6) ಮತ್ತು (4,—8) (vi) (—1,—2) ಮತ್ತು (—3,—4)

2 (i) $P\equiv(0, 0)$, $Q\equiv(1,-1)$, $r=2$
(ii) $P\equiv(1, 1)$, $Q\equiv(2,-4)$, $r=-\frac{1}{2}$
(iii) $P\equiv(-1,-2)$, $Q\equiv(-2,-1)$, $r=\frac{1}{3}$

(iv) $P\equiv(-1, 2)$, $Q\equiv(-8, 0)$, $r=-\frac{1}{4}$
(v) $P\equiv(a, b)$, $Q\equiv(b, a)$, $r=\frac{1}{2}$

3 Find the points of trisection of the line joining t[illegible] following pairs of points :

(i) (1, —2) and (—3, 4)
(ii) (—2, —2) and (4, 3)
(iii) (0, 1) and (1, 0)

4 The line joining the points (6, 8) and (8, —6) divided into four equal parts. Find the points of divisio[illegible]

5 Find the centroid of the triangle where vertices a[illegible]

(i) (0, 0), (9, 2) and (—6, 4)
(ii) (2, 1), (3, 4) and (—2, —2)
(iii) $(2a, b)$, $(a+c, 2b+c)$ and $(-c, -c)$

6 If $A\equiv(1, -2)$ and $B\equiv(5, -3)$, in what ratio will t[illegible] x and y *axes* divide AB? Find the co-ordinates of t[illegible] points at which the axes meet AB?

7 Find the distance between the points which divi[illegible] internally and externally the line segment from (2, 2) [illegible] (4, 6) in the ratio 1 : 3.

8 Find the lengths of the medians of the triang[illegible] whose vertices are (5, —1), (1, 5) and (—3, 1).

9 One end of a line segment is (4 , 0) and t[illegible] middle point is (4, 1). Find the other end.

10 The centre of a given circle is at C (—2, 6). [illegible] diameter of the circle has an end point at A(3,8). Dete[illegible] mine the co-ordinates of B, the other end point of di[illegible] meter AB.

(iv) $P \equiv (-1, 2)$, $Q \equiv (-8, 0)$, $r = -\frac{1}{4}$

(v) $P \equiv (a, b)$, $Q \equiv (b, a)$, $r = \frac{1}{2}$

ದಾಗ P ನಿಂದ Q ಗಿರುವ ರೇಖಾಭಾಗವನ್ನು $r : 1$ ರ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

3 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದು ದ್ವಯುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ತ್ರಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

(i) $(1, -2)$ ಮತ್ತು $(-3, 4)$

(ii) $(-2, -2)$ ಮತ್ತು $(4, 3)$

(iii) $(0, 1)$ ಮತ್ತು $(1, 0)$.

4 $(6, 8)$ ಮತ್ತು $(8, -6)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

5 (i) $(0, 0)$, $(9, 2)$ ಮತ್ತು $(-6, 4)$

(ii) $(2, 1)$, $(3, 4)$ ಮತ್ತು $(-2, -2)$

(iii) $(2a, b)$, $(a+c, 2b+c)$ ಮತ್ತು $(-c, -c)$

ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಶೃಂಗಗಳಾಗುಳ್ಳ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

6 $A \equiv (1, 2)$ ಮತ್ತು $B \equiv (5, -3)$ ಆದರೆ, x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳು AB ಯನ್ನು ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ? AB ಯನ್ನು ಅಕ್ಷಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

7 $(2, 2)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $(4, 6)$ ಬಿಂದುವರೆಗಿನ ರೇಖಾಭಾಗವನ್ನು ಅಂತರೀಯುವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ $1 : 3$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8 $(5, -1)$, $(1, 5)$ ಮತ್ತು $(-3, 1)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಶೃಂಗಗಳಾಗುಳ್ಳ ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

9 ರೇಖಾಭಾಗವೊಂದರ ಒಂದು ತುದಿಯು $(4, 0)$ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವು $(4, 1)$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

10 ವೃತ್ತವೊಂದರ ಕೇಂದ್ರವು C $(-2, 6)$ ಆಗಿದೆ. ವ್ಯಾಸವೊಂದರ ಒಂದು ತುದಿಯು A $(3, 8)$ ಆಗಿದೆ. AB ವ್ಯಾಸದ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿ B ಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

11 A line PQ is trisected at $A \equiv (6, 6)$ and $B \equiv (10, 16$
Find P and Q

12 A line AB is divided internally at (3, 4) in th ratios 2 : 3 and at (6, 2) in the ratio 3 : 2. Find A and B.

13 If $A \equiv (2, 3)$ and $B \equiv (4, 5)$, find C on AB wher $AC = 4\,AB$.

14 In a triangle ABC, B, C and G (the centroid) ar (2, 3), (—3, 4) and (—5,—1). Find A.

15 Use analytic geometry to prove each of the follow ing theorems: (Select the axes so as to make the algebrai computation as simple as possible).

(*a*) The line joining the mid points of two sides of triangle is half the third side.

(*b*) The mid point of the hypotenuse of a rigl triangle is equidistant from its three vertices.

(*c*) If two medians of a triangle are equal in lengt then the triangle is isosceles.

(*d*) The mid points of the sides of a rhombus a the vertices of a rectangle.

(*e*) The segments joining the midpoints of opposi sides of any quadrilateral bisect each other.

(*f*) If G be the centroid of a triangle ABC and be any other point, then

$$BC^2 + CA^2 + AB^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

and $OA^2 + OB^2 + OC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GO^2$

(*g*) $ABCD$ is a parallelogram and P is a point i its plane. If the diagonals of the parallelogram interse at G, then

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4PG^2 + AB^2 + BC^2$$

11 PQ ರೇಖೆಯನ್ನು $A \equiv (6, 6)$ ಮತ್ತು $B \equiv (10, 16)$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭಜಿಸಲಾಗಿದೆ. P ಮತ್ತು Q ಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

12 AB ರೇಖೆಯನ್ನು $2:3$ರ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ (3.4) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ, $3:2$ರ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ (6, 2) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿದೆ, A ಮತ್ತು B ಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

13 $A \equiv 2, 3)$ ಮತ್ತು $B \equiv (4, 5)$ ಆದರೆ ABಯ ಮೇಲೆ $AC = 4\ AB$ ಆಗುವಂತೆ C ಯನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

14 ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ B, C ಮತ್ತು G (ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರ) ಗಳು (2, 3), (—3, 4) ಮತ್ತು (—5, —1) ಆಗಿವೆ. A ಯನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

15 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ. (ಬೀಜಗಣಿತ ಪ್ರಯೋಗವು ಸಾಕಷ್ಟು ಸರಳವಾಗಿರುವಂತೆ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ).

(a) ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವಿನ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುವುದು.

(b) ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಕರ್ಣದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವು ಅದರ ಶೃಂಗಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವುದು.

(c) ತ್ರಿಭುಜವೊಂದರ ಎರಡು ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜವು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರುವುದು.

(d) ವಜ್ರಾಕೃತಿಯೊಂದರ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಆಯವೊಂದರ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವುವು.

(e) ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾ ಭಾಗಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ.

(f) G ಯು ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರವೂ, O ವು ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಆದಾಗ

$BC^2 + CA^2 + AB^2 = 3\ (GA^2 + GB^2 + GC^2)$ ಮತ್ತು $OA^2 + OB^2 + OC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3\ GO^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(g) $ABCD$ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೂ P ಯು ಅದರ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವೂ ಆಗಿವೆ. ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು G ಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ

$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4\ PG^2 + AB^2 + BC^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4.4 Locus and its Equation—

Let L be a set of points in a plane such that each and every point of the set L satisfies a geometrical condition. Then we say that L is the locus of a point of that set. From this, it follows that each and every point of the locus satisfies that condition and no point which does not belong to the locus satisfies it.

For example, if we consider a circle, it can be recognised as the set of points in a plane which are at a constant distance from a fixed point. This condition is such that each and every point of the circle satisfies it and no point which does not lie on the circle satisfies it. Hence we say that a circle is the locus of a point which lies at a constant distance from a fixed point.

We have seen that a point in a plane can be represented by means of two numbers called the co-ordinates. Hence, if we consider a point of the locus, the co-ordinates of that point should naturally satisfy an algebraic condition since the point satisfies a geometrical condition. This condition will be usually in the form of an equation and this equation will be such that the co-ordinates of each and every point of the locus and no point which does not belong to the locus satisfies it. We call it as an *equation of the locus*.

For example, in the case of a circle, if we denote the centre by (h, k) and a point of the circle by (x, y), then the condition satisfied by that point can be written algebraically as (by using the distance formula)

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, where r is the radius of the circle.

4.4. ಬಿಂದು ಪಥ ಹಾಗೂ ಅದರ ಸಮೀಕರಣ

L ಎನ್ನುವುದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಒಂದು ಗಣವಾಗಿರಲಿ. L ಗಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಒಂದು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ನಿಬಂಧನೆಗೆ ಒಳಗಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ನಾವು L ಗಣವನ್ನು ಆ ಗಣದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದು ಪಥವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ ಬಿಂದು ಪಥದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಆ ನಿಬಂಧನೆಗೆ ಒಳಗಾಗಿರುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಬಿಂದು ಪಥಕ್ಕೆ ಸೇರದ ಯಾವ ಬಿಂದುವೂ ಅದಕ್ಕೆ ಒಳಗಾಗಿರಲಾರದು ಎಂದು ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವೃತ್ತವೊಂದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಅದನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲವುಗಳ ಗಣ ಎಂದು ಗುರುತಿಸ ಬಹುದು. ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಈ ನಿಬಂಧನೆಗೊಳ ಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿಲ್ಲದ ಯಾವ ಬಿಂದುವೂ ಈ ನಿಬಂಧನೆಗೊಳ ಪಟ್ಟಿರುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ಇಲ್ಲಿ ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ.

ಆದುದರಿಂದ ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ ರುವ ಬಿಂದುವೊಂದರ ಪಥ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಬಿಂದುವನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಎಂಬ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಆದುದರಿಂದ, ಬಿಂದುಪಥ ವೊಂದರಲ್ಲಿನ ಬಿಂದುವೊಂದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಆ ಬಿಂದುವು ಒಂದು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ನಿಬಂಧನೆಗೆ ಒಳಗಾಗಿರುವುದರ ಕಾರಣ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಸಹಜವಾಗಿ ಬೀಜವಾಕ್ಯ ವೊಂದನ್ನು ತೃಪ್ತಿಗೊಳಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಬೀಜವಾಕ್ಯವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಬಿಂದುಪಥದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೂ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತವೆ, ಹಾಗೂ ಬಿಂದುಪಥದಲ್ಲಿರದ ಯಾವ ಬಿಂದು ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೂ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಾವು ಬಿಂದುಪಥದ ಸಮೀಕರಣವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವೃತ್ತದ ವಿಷಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಅದರ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು (h, k) ಎಂದೂ, ವೃತ್ತದ ಮೇಲಣ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು (x, y) ಎಂದೂ ಸೂಚಿಸಿ ದಾಗ ಆ ಬಿಂದುವು ಸರಿದೂಗಿಸುವ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು (ದೂರದ ಸೂತ್ರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕೊಂಡು)

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ (r ಎನ್ನುವುದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವುದು) ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

It is clear that this equation holds good for each ar every point of the circle and so it is an equation of the loci *viz.*, the circle whose centre is at (h, k) and radius is r.

The above considerations of the locus reveal that a point is common to two loci, then it should satisfy tl geometrical conditions of both the loci. Hence i co-ordinates should satisfy the equations of both the lo simultaneously. Conversely, if the co-ordinates of point satisfy two different equations, then the point belon to both the loci and hence is a point where the two lo cross.

Thus, in conclusion, we may state that by a locus w mean a set of points satisfying a condition and it can b represented algebraically in the form of an equatio This equation determines its nature and its properties ca be studied by means of algebraic calculations wit the help of its equation. This, in fact, is the scope analytic geometry.

Exercises 4.4

1 Find the equation of the locus of a point which at a distance 4 units from (i) the *y-axis* and (ii) the *x-axi*

2 Find the equation of the locus of a point which is at distance 3 units from (5, 4).

3 Find the equation of the locus of a point which equidistant from $(-a, o)$ and (a, o).

4 Find the equation of the locus of a point whos distance from (—2, 1) is twice its distance from (2, 3).

5 Show that the equation of the locus of a point whos distance from (a, o) is equal to its distance from the *y-axi* is $y^2 = a\,(2x - a)$.

ಈ ನಿಬಂಧನೆಯು ವೃತ್ತದ ಪ್ರತಿಬಿಂದುವಿಗೂ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುವುದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಅದ್ದರಿಂದ ಇದು ಬಿಂದುಪಥದ—(h, k) ಯನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ r ನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಯೂ ಉಳ್ಳ ವೃತ್ತದ—ಸಮೀಕರಣವಾಗುತ್ತದೆ.

ಬಿಂದು ಪಥದ ಈ ಮೇಲಿನ ಪರಿಶೀಲನೆಯಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ವಿಷಯವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಎರಡು ಪಥಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದು ಎರಡೂ ಪಥಗಳ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಎರಡೂ ಪಥಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸರಿದೂಗಿಸುವಂತಿರಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ಬಿಂದುವೊಂದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುವಂತಿದ್ದರೆ ಆ ಬಿಂದುವು ಅವೆರಡು ಪಥಗಳಿಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಅಂದರೆ ಅವೆರಡೂ ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉಪಸಂಹಾರವಾಗಿ, ಬಿಂದು ಪಥವೆಂದರೆ ಒಂದು ನಿಬಂಧನೆಗೆ ಒಳಪಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಸಮೂಹ. ಅದನ್ನು ಬೀಜ ಸಮೀಕರಣವೊಂದರಿಂದ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಪಥದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ನಿಗದಿಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅದರ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ ಅಭ್ಯಸಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಇದು ಬೀಜ ರೇಖಾಗಣಿತದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 4.4

1 (i) y—ಅಕ್ಷದಿಂದ ; (ii) x—ಅಕ್ಷದಿಂದ 4 ಮಾನಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದು ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

2 (5, 4) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ 3 ಮಾನಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿನ ಬಿಂದುವೊಂದರ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3 $(-a, o)$ ಮತ್ತು (a, o) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

4 ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ (—2, 1) ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವು ಅದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ (2, 3) ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರದ ಎರಡರಷ್ಟಾದರೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವೇನು ?

5 (a, o) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಾಗೂ y—ಅಕ್ಷದಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವೊಂದರ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವು $y^2 = a\ (x-a)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4·5 Change of the Origin

Suppose that there are two coordinate systems in plane. In the first one—we shall call it $x\ y$ system—let th coordinates of a point be (x, y). In the second one—we sha call it XY system—let the coordinates of a point be $(X, Y$ Moreover let the X-axis be parallel to the x-axis. In suc a case we say that the XY system is obtained from th xy system by shifting the origin without rotating the ax *i.e.*, by means of a translation.

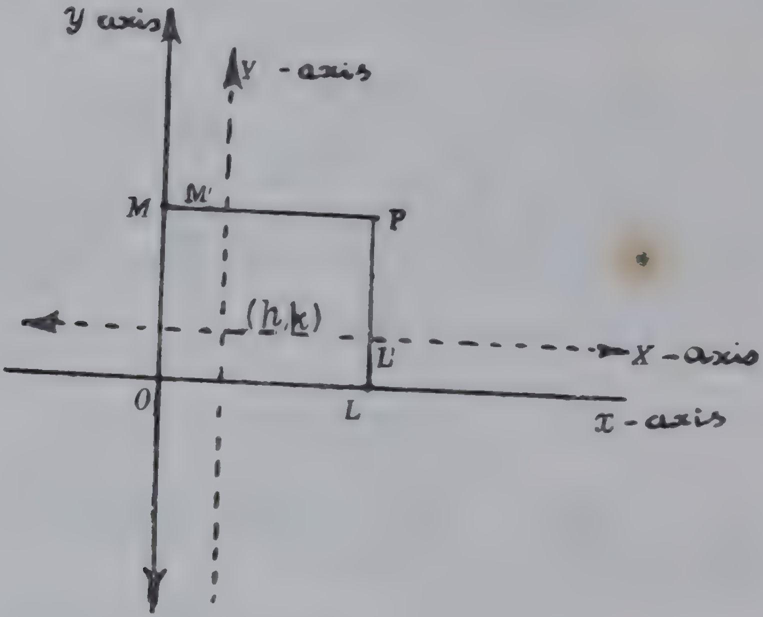


Fig. 4·8

Now, each point of the plane has two pairs o co-ordinates (x, y) and (X, Y) with reference to the tw systems. The origin of the XY—system has the coordinat (h, k) in the $x\ y$ system.

The relationship between the two pairs of coordinate of a point is as given below.

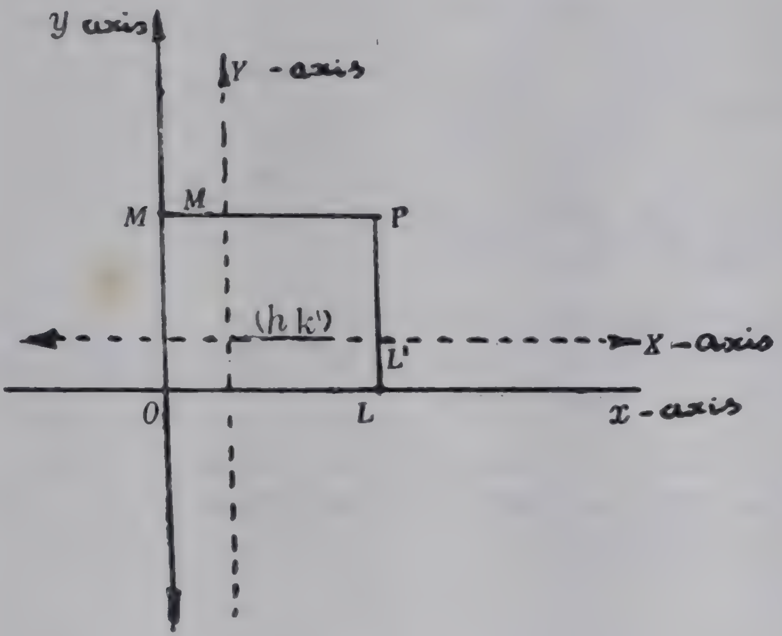
$$x = \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'P} = h + X$$

$$y = \overrightarrow{LP} = \overrightarrow{LL'} + \overrightarrow{L'P} = k + Y$$

or $X = x - h,\ Y = y - k.$

.5 ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಪಲ್ಲಟ

ಸಮತಲವೊಂದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ನಿರ್ದೇಶನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳಿವೆ ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ. ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ—ಇದನ್ನು xy ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ—ಬಿಂದುವೊಂದರ ನಿರ್ದೇಶಗಳು (x, y) ಆಗಿರಲಿ. ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ—ಇದನ್ನು XY ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ—ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (X,Y) ಆಗಿರಲಿ. ಇಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ X ಅಕ್ಷವು Y—ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರಲಿ. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಾವು XY ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು, xy—ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಿಂದ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ತಿರುಗಿಸದೆ ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಪಲ್ಲಟ ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಅಂದರೆ ಒಂದು ಸ್ಥಳಾಂತರದ ಮೂಲಕ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 4.8

ಈಗ, ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಬಿಂದುವೂ (x, y) ಮತ್ತು (X, Y) ಎಂಬ ಎರಡು ಜತೆ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. XY ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಮೂಲಬಿಂದುವು xy ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ (h, k) ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಜತೆ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಿರುವ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವುದು.

$$x = \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MM^1} + \overrightarrow{M^1P} = h + X$$

$$y = \overrightarrow{LP} = \overrightarrow{LL^1} + \overrightarrow{L^1P} = k + Y$$

ಅಥವಾ $X = x - h,\ Y = y - k$

Thus, if the origin is shifted without rotating the ax the coordinates (x, y) of a point change over to $(X=x-$ $Y=y-k)$. Here (h, k) are the coordinates of the ne origin with reference to the old axes.

If a curve in the plane is taken such that $f(x, y)=0$ is i equation with reference to xy—system, its equation wit reference to XY—system may be written as $f(x+h, y+$ by changing x to $x+h$ and y to $y+k$.

For example, suppose the equation

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2 \text{ is given.}$$

Let the origin of the XY—system with reference xy— system be (h, k). Then $x^2+y^2=a^2$ is the new equatio

Both of the above two equations represent the san curve namely the circle. But it is to be noted that tl former is simpler than the latter.

The above example shows that, in certain cases th XY system can be so chosen that a given equation in x, becomes simple to deal with.

This method of changing the origin is often used i analytie geometry to stndy some of the properties of curve

ಹೀಗೆ, ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ತಿರುಗಿಸದೆಯೇ ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದರೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ (x, y) ಎನ್ನುವ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(X=x-h, \ Y=y-k)$ ಎಂದು ಪರಿವರ್ತಿತವಾಗುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ (h,k)ಯು ಮೊದಲಿನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಹೊಸಸ್ಥಾನದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು.

$f(x,y)=0$ ಎನ್ನುವುದು $xy-$ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ವಕ್ರರೇಖೆಯೊಂದರ ಸಮೀಕರಣವಾದರೆ $XY-$ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು x ಗೆ ಬದಲಾಗಿ $x+h$, ಮತ್ತು y ಗೆ ಬದಲಾಗಿ $y+k$ ಬರೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ $f(x+h, \ y+k)=0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $(x-h)^2+(y-x)^2=a^2$ ಎನ್ನುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ ಎನ್ನೋಣ.

XY ವ್ಯವಸೆಯ ಮೂಲಬಿಂದುವು $xy-$ ವ ವಸೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ (h,k) ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$x^2+y^2=a^2$ ಎನ್ನುವುದು ಹೊಸ ಸಮೀಕರಣ.

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳೆರಡೂ ಒಂದೇ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಅಂದರೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣವು ಮೊದಲನೆಯದಕ್ಕಿಂತ ಸರಳವಾಗಿರುವುದು ಎಂಬುದನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಈ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯು, ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಸಮೀಕರಣವು ಸರಳವಾಗುವಂತೆ $XY-$ ವ ವಸೆಯೊಂದನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ ದೆ.

ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಪಲ್ಲಟ ಮಾಡುವ ಈ ವಿಧಾನವನು ವಕ ರೇಖೆಗಳ ಕೆಲವು ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಲು ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ ದೆ.

CHAPTER 5

The Straight Line

Next to a *point*, the simplest geometrical figure the *straight line*. In this Chapter we shall study it fro an analytical point of view by giving an algebraic represe tation to it. Before we do so, we shall discuss some the basic concepts concerned with the straight lines the following three sections.

5.1. The Slope of a Line—

Let l be a line in a plane where a co-ordinate syste has been set up. Let the measure of the angle from t positive direction of the x-axis to l be α where $0 \leqslant \alpha <$ $\alpha \neq \pi/2$. Then we call α the *inclination* and tan the *slope* or *gradient* of l. It follows from the definiti that the slope is positive if $0 < \alpha < \pi/2$ and the slope negative if $\pi/2 < \alpha < \pi$. Also, the slope of a line paral to OX is zero (since $\alpha = 0$) and the slope of a line para to OY is not defined (since $\alpha = \pi/2$ and tan α is r defined for $\alpha = \pi/2$). Usually we denote the slope of line by m.

Now, let A $(x_1, y_1,)$ and B (x_2, y_2) be *any* two arbitra points on l. Let the horizontal through A and the verti through B meet at C. [See Fig. 5.1 (a) and (b)]. Th it is easily seen that $C \equiv (x_2, y_1)$.

ಅಧ್ಯಾಯ 5

ಸರಳರೇಖೆ

ಬಿಂದುವಿನ ಅನಂತರದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಅತ್ಯಂತ ಸರಳವಾದು ದೆಂದರೆ ಸರಳ ರೇಖೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಅದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಬೀಜ ನಿರೂಪಣೆ ಯನ್ನು ಕೊಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅದನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವೆವು. ಹಾಗೆ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಮೊದಲು ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಮೂಲ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

5.1 ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಓಟ

l ಎನ್ನುವುದು ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಸಿದ್ಧ ಪಡಿಸಿದ ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ. x-ಅಕ್ಷದ ಧನದಿಕ್ಕಿನಿಂದ l ಗಿರುವ ಕೋನದ ಪರಿಮಾಣವು α ಆಗಿರಲಿ. $(0 \leqslant \alpha < \pi\,;\ \alpha \neq \frac{\pi}{2})$. ಆಗ ನಾವು α ವನ್ನು l ರೇಖೆಯ ಇಳಿವು ಎಂದೂ, $\tan \alpha$ ವನ್ನು ಅದರ ಓಟ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಓಟವು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಓಟವು ಋಣಾತ್ಮಕವೂ ಆಗಿರುವುದೆಂದು $\tan \alpha$ದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ, OX ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಓಟವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿಯೂ ($\alpha = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ), OY ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಓಟವು ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿಯೂ ($\alpha = \frac{\pi}{2}$ ಆಗಿ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ಗೆ $\tan \alpha$ ವು ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿರುವುದರಿಂದ) ಇರುವುದೆಂದೂ ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಾವು ರೇಖೆಯ ಓಟವನ್ನು m ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಗಳು l ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. A ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಅಡ್ಡರೇಖೆಯೂ B ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಊರ್ಧ್ವರೇಖೆಯೂ C ಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. [ಚಿತ್ರ 5.1 (a) ಮತ್ತು (b) ನೋಡಿ]. ಆಗ $C = (x_2, y_1)$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ನೋಡಬಹುದು.

(i) Let $m = \tan \alpha > 0$

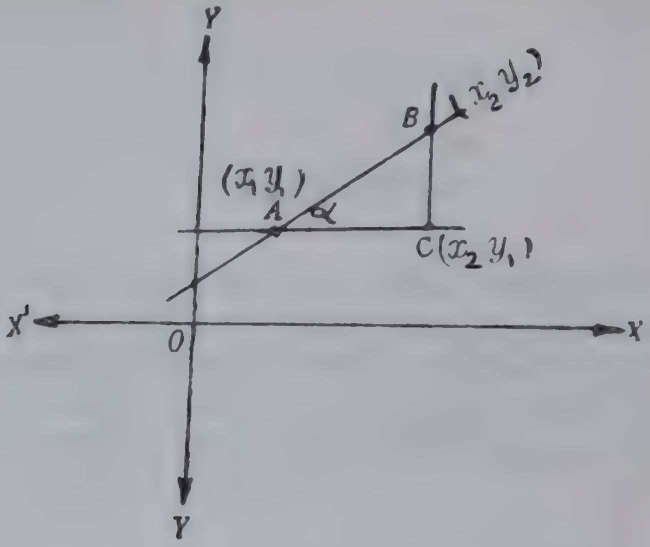


Fig. 5.1 (*a*)

In this case $\tan \alpha = \tan \angle BAC = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (why ?)

(ii) Let $m = \tan \alpha < 0$

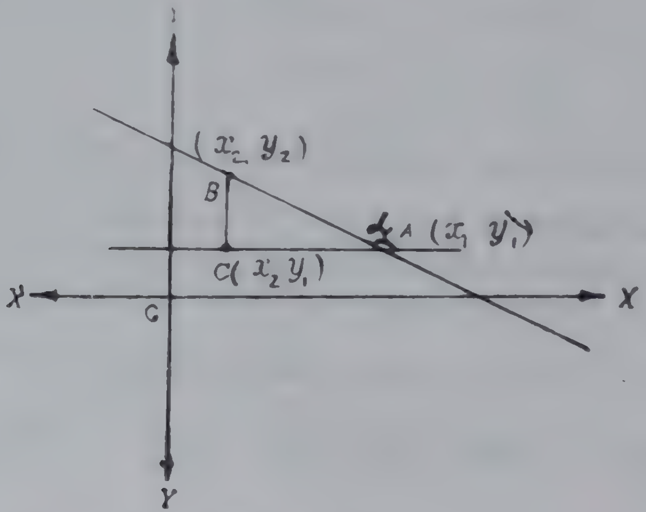
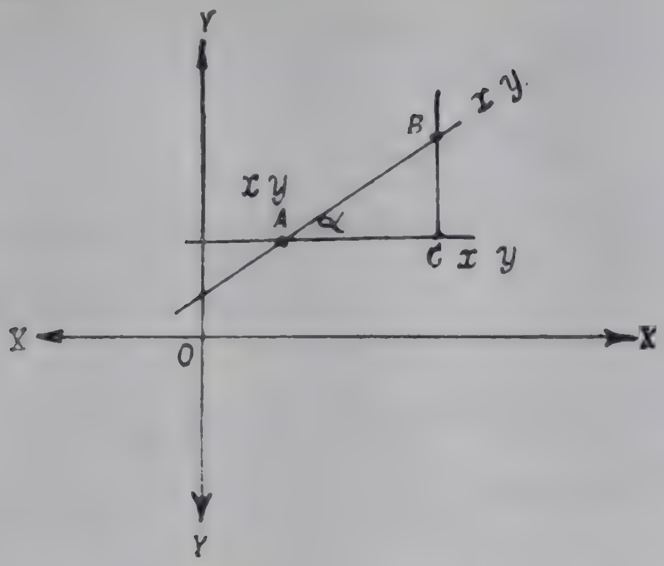


Fig. 5.1 (*b*)

In this case $\tan \alpha = \tan (\pi - \angle BAC) = -\tan \angle B$

$= -\dfrac{y_1 - y_2}{x_2 - x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$ (why ?)

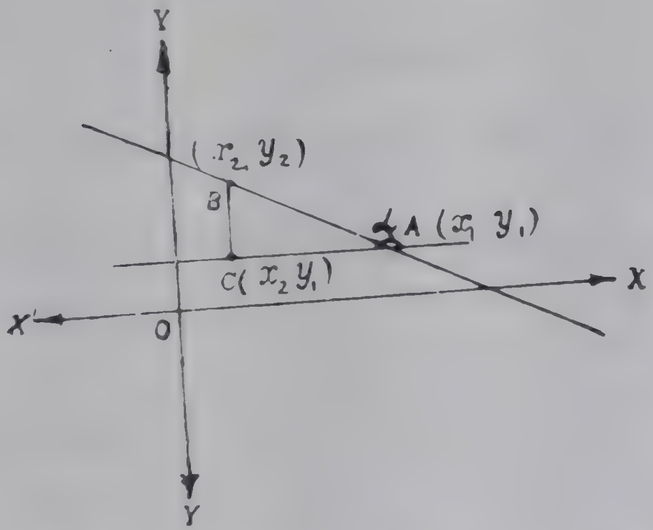
) $m = \tan \alpha > 0$ ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 5.1(a)

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $\tan \alpha = \tan \angle BAC = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (ಏಕೆ ?)

(ii) $m = \tan \alpha < 0$ ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 5.1 (b)

ಆಗ $\tan \alpha = \tan (\pi - \angle BAC) = -\tan \angle BAC$

$$= -\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{(ಏಕೆ ?)}$$

Thus, in both the cases

the slope of the line l passing through the points $(x_1, y$
and (x_2, y_2) is given by

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

NOTE :—That the order of taking the difference in numerator and denominator is same.

Cor : If l passes through the origin and the po (x_1, y_1), its slope is $m = \frac{y_1}{x_1}$

NOTE :—If $x_1 = x_2$, *i.e.*, if l is perpendicular to x—axis, the slope is not defined and the express $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ becomes meaningless.

Examples

1 Find the slope of the line through the poi (1, 7) and (—4, 2).

From the expression for the slope it follows that

$$m = \frac{2-7}{-4-1} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

∴ Slope of the line is 1. It is positive and so inclination is $\frac{\pi}{4}$.

2 Show that the line through the points $(3\sqrt{3}, -$ and $(4\sqrt{3}, -6)$ makes an angle of measure 150° with positive direction of the x-axis.

ಹೀಗೆ, ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ :

> $(x_1\ y_1)$ ಮತ್ತು $(x_2\ y_2)$ ಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಓಟವು
>
> $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

[ಅಂಶ ಹಾಗೂ ಛೇದಗಳೆರಡರಲ್ಲೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕ್ರಮವು ಂದೇ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ].

ಉಪಪ್ರಮೇಯ : l ರೇಖೆಯು ಮೂಲ ಬಿಂದು ಹಾಗೂ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋದರೆ ಅದರ ಓಟವು $m = \frac{y_1}{x_1}$ ಆಗಿರುವುದು.

ಸೂಚನೆ : $x_1 = x_2$ ಆದಾಗ, ಅಂದರೆ l ರೇಖೆಯು x— ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾದಾಗ ಓಟವನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಗೊಳಿಸಿಲ್ಲ. ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ಎನ್ನುವ ಓಟದ ನಾವವು ಅರ್ಥವಿಲ್ಲದ್ದಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 (1, 7) ಮತ್ತು (−4, 2) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾಯುವ ರೇಖೆಯ ಓಟವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

ಓಟದ ಸೂತ್ರದಿಂದ $m = \frac{2-7}{-4-1} = 1$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore$ ರೇಖೆಯ ಓಟವು 1. ಅದು ಧನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಇಳಿವು $\frac{\pi}{4}$.

2 $(3\sqrt{3},\ -3)$ ಮತ್ತು $(4\sqrt{3},\ -6)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯು x—ಅಕ್ಷದ ಧನ ದಿಕ್ಕಿನೊಂದಿಗೆ $150°$ ಪರಿಮಾಣದ ಕೋನ ವನ್ನೇರ್ಪಡಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

If α is the angle made by the line with the positi
direction of the x-axis, we have

$$\tan \alpha = \frac{-6+3}{4\sqrt{3}-3\sqrt{3}} = \frac{-3}{\sqrt{3}(4-3)} = -\sqrt{3}$$

Since $\tan \alpha$ is negative, α is obtuse and its value is

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \quad \left(\because \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{5\pi}{6} = \frac{5.180^\circ}{6} = 150^\circ$$

3 Find the inclination of the line through (4,
and the mid point between (1, 3) and (−3, 1).

The mid point between (1, 3) and (−3, 1) is

$$\left[\frac{1-3}{2}, \frac{3+1}{2}\right] \text{ i.e. } [-1, 2].$$

Hence the slope of the given line is

$$\tan \alpha = \frac{2-7}{-1-4} = \frac{-5}{-5}$$

∴ The inclination is an accute angle such th

$\tan \alpha = 1$. Its measure is $\frac{\pi}{4}$.

Exercises 5.1

1 Find the slopes of the line segments joini
the following pairs of points.

(i) (0, 0) and (3, 4).

(ii) (5, 6) and (8, 3).

(iii) (−3, −3) and (2, 2).

(iv) (2, 7) and the mid point of the line segme
joining (1, 5) and (−3, 1).

(v) (−3, 4) and the point which divides the li
segment from (6, 6) to (−8, −1) in the ra
$-\frac{1}{2} : 1$.

x— ಅಕ್ಷದ ಧನದಿಕ್ಕಿನೊಂದಿಗೆ ರೇಖೆಯು ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನವು α ಆದಾಗ,

$$\tan \alpha = \frac{-6+3}{4\sqrt{3}-3\sqrt{3}} = \frac{-3}{\sqrt{3}\,(4-3)} = -\sqrt{3}$$

ಆಗುವುದು.

$\tan \alpha < 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ α ವಿಶಾಲ ಕೋನವಾಗಿ ಅದರ ಪರಿಮಾಣವು

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \quad \left(\because \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{5\pi}{6} = 150°.$$

3 (4, 7) ಮತ್ತು 1, 3), (—3, 1) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಇಳಿವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

(1, 3) ಮತ್ತು (—3, 1) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಭಾಗದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವು $\left[\frac{1-3}{2}, \frac{3+1}{2}\right]$ ಅಂದರೆ $[-1, 2]$ ಆಗಿರುವುದು.

$\therefore$ ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಓಟ $= \tan \alpha = \dfrac{2-7}{-1-4} = +\dfrac{5}{5}$.

$\therefore$ ಇಳಿತವು $\tan \alpha = 1$ ಆಗಿರುವಂತಹ ಒಂದು ಲಘುಕೋನ. ಅದರ ಪರಿಮಾಣ $\frac{\pi}{4}$.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 5.1

1 ಈ ಕೆಳಗೆಕಂಡ ಬಿಂದುದ್ವಯಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಭಾಗಗಳ ಓಟಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

(i) (0, 0) ಮತ್ತು (3, 4)

(ii) (5, 6) ಮತ್ತು (8, 3)

(iii) (—3, —3) ಮತ್ತು (2, 2)

(iv) (2, 7) ಮತ್ತು (1, 5), (—3, 1) ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಭಾಗದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು

(v) (—3, 4) ಮತ್ತು (6, 6) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ (—8, —1)ರ ವರೆಗಿನ ರೇಖಾಭಾಗವನ್ನು $-\frac{1}{2} : 1$ ರ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದು.

2 Find a such that the line segments joining following pairs of points have the slopes shown agai them.

(i) (1, 2) and $(a, 0)$; $m=1$.

(ii) $(a, 5)$ and $(5, -1)$; $m=-\frac{1}{2}$.

(iii) $(a, 0)$ and $(-1, -5)$; $m=0$.

3 Replace "?" so that the lines through the foll ing pairs of points are parallel to the y-axis.

(i) (5, 2) and (?, 8).

(ii) (4, −5) and (?, 1).

(iii) (x_1, y_1) and $(?, y_2)$.

4 Find the slopes of the sides and the medians the triangle formed by the points (1, −2), (3, 6) a (−2, 4).

5 If a road elevates 25 cms. for each Km. F its slope.

5.2 Relation between the Slopes of Parallel and Perper cular Lines.

Let l and l' be two distinct lines in a plane. T from pure geometry we know that if they are para both of them form equal corresponding angles with transversal and if they are perpendicular, the posit difference of the measures of the angles made by th with a third line is equal to a right angle and convers

Now, let $m=\tan \alpha$ and $m'=\tan \beta$ be the slopes of two lines l and l'. Then the above result shows that if l and l' are parallel $\alpha=\beta$ and conversely.

Also, if l and l are perpendicular,

$$|\alpha-\beta|=\frac{\pi}{2}.$$

i.e. $\alpha=\beta+\frac{\pi}{2}$ when $\alpha>\beta$

or $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$ when $\beta>\alpha$

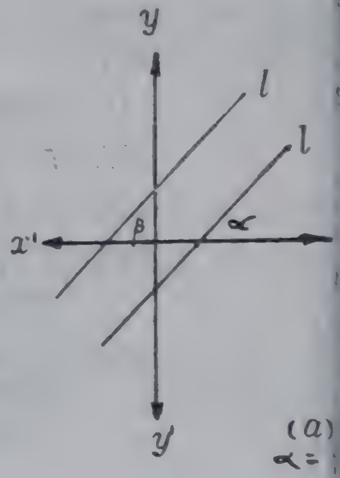


Fig. 5·2

2 ಈ ಕೆಳಗೆ ಕಾಣಿಸಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಬಾಭಾಗಗಳು ಅವುಗಳ ಸಂಗಡ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಓಟಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತೆ a ನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

) (1, 2) ಮತ್ತು $(a, 0)$; $m=1$ (ii) $(a, 5)$ ಮತ್ತು $(5, -1)$; $m=-\frac{1}{2}$

ii) $(a, 0)$ ಮತ್ತು $(-1, -5)$, $m=0$

3 ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುದ್ವಯಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ರೇಖೆಗಳು —ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ "?" ಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

(i) (5, 2) ಮತ್ತು (?, 8) (ii) (4, —5) ಮತ್ತು (?, 1)

(iii) $x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $(?, y_2)$

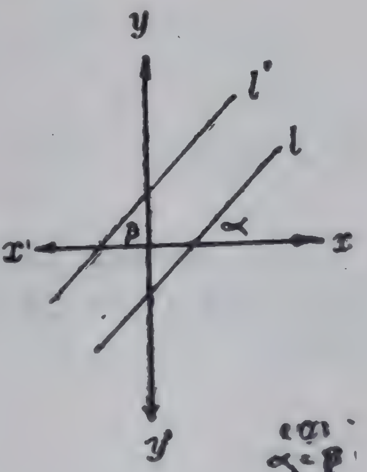
4 (1, —2), (3, 6) ಮತ್ತು (—2, 4) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಹಾಗೂ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ಓಟಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

5 ಒಂದು ರಸ್ತೆಯು ಪ್ರತಿ ಕಿ. ಮೀ. ಗೆ 25 ಸೆ. ಮೀ. ನಂತೆ ಎತ್ತರವಾಗು ದೆ. ಆ ರಸ್ತೆಯ ಓಟವೇನು ?

2 ಸಮಾನಾಂತರ ಹಾಗೂ ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳ ಓಟಗಳಿರುವ ಸಂಬಂಧ

l ಮತ್ತು l' ಗಳು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ರೇಖೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ವುಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ ಒಂದು ಛೇದಕ ರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ಅವೆರಡೂ ಒಂದೇ ಶತೆಯ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳನ್ನೇರ್ಪಡಿಸುತ್ತವೆ ; ಹಾಗೂ ಅವುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬ ಗಿದ್ದರೆ, ಮೂರನೆಯ ರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ಅವೆರಡೂ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನಗಳ ಧನ ತ್ಯಾಸವು ಒಂದು ಸಮಕೋನದಷ್ಟಿರುವುದು. ಅಲ್ಲದೆ ಇವುಗಳ ವಿಲೋಮವೂ ವಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ನಾವು ಶುದ್ಧ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಿಂದ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

ಈಗ, $m = \tan\alpha$ ಮತ್ತು $m' = \tan\beta$ಗಳು ಮತ್ತು l' ಎಂಬ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ಟಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಯಿಂದ l ತ್ತು l' ಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದರೆ $\alpha=\beta$ ತು ಅದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ ಎಂದು ತಿಳಿದು ರುವುದು.



ಚಿತ್ರ 5.2 (a)

l ಮತ್ತು l' ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ

$- \beta = \frac{\pi}{2}$ ಆಗಿರುವುದು.

ದರೆ $\alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$ ($\alpha > \beta$ ಆದಾಗ)

ವಾ $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ ($\beta > \alpha$ ಆದಾಗ)

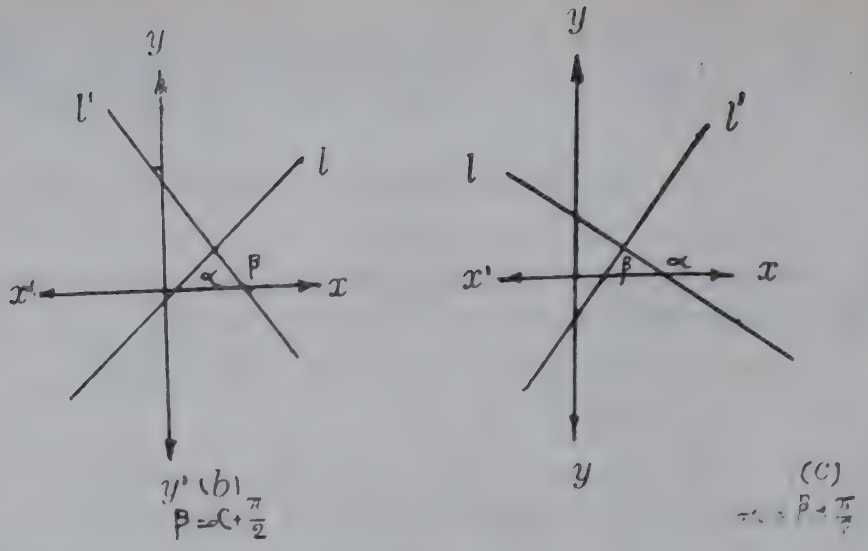


Fig. 5.2 (b) and (c)

$$\text{This gives } \tan\alpha = \tan\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\beta$$

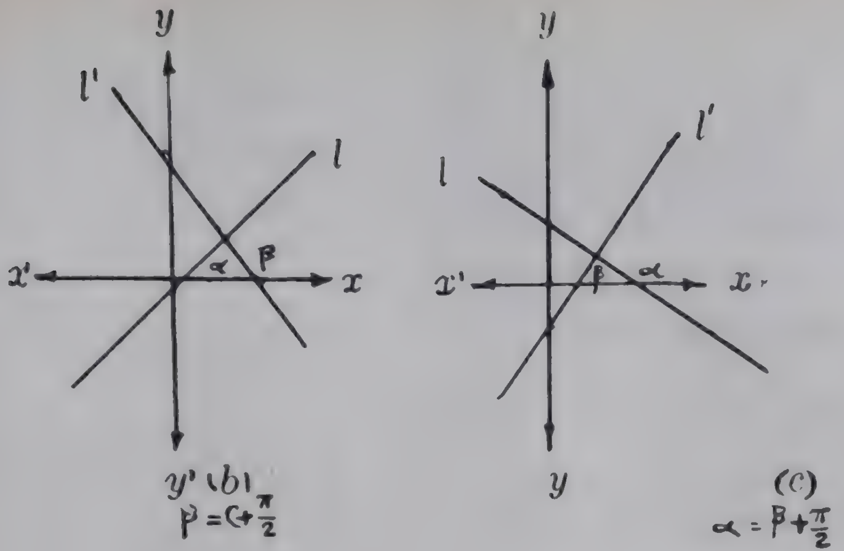
$$\text{or} \quad \tan\beta = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\alpha.$$

i.e. $\tan\alpha \tan\beta = -1$ in both the cases.

$mm' = -1.$

The converse of this is also true.

Thus, *the two lines with slopes m and m′ are paral if and only if $m = m'$ and are perpendicular if and o if $mm' = -1$.*



ಚಿತ್ರ 5·2 (*b*) ಮತ್ತು (*c*)

ಇದರಿಂದ $\tan \alpha = \tan\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \beta$

ಅಥವಾ $\tan \beta = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \alpha$ ಎಂದಾಗುವುದು.

∴ ಎರಡೂ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $\tan \alpha \tan \beta = -1$ ಅಥವಾ

$mm' = -1$ ಎಂದು ಬರುವುದು.

ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯವಾಗಿರುವುದು.

ಹೀಗೆ, m ಮತ್ತು m' ಗಳನ್ನು ಓಟಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು $m = m'$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುವು ಮತ್ತು $mm' = -1$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಲಂಬವಾಗಿರುವುವು.

1 Show that the line segments joining A (—1, B (2, —1) and C (1, 1), D (—2, 3) are parallel.

$$\text{Slope of } AB = \frac{-1-1}{2+1} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Slope of } CD = \frac{3-1}{-2-1} = -\frac{2}{3}$$

and they are equal. $\therefore AB \parallel CD$.

2 Show that the points A (0, 2), B (1, 0) a C (3, 1) form a right angled triangle.

$$\text{Slope of } AB = \frac{0-2}{1-0} = -2.$$

$$\text{Slope of } BC = \frac{1-0}{3-1} = \tfrac{1}{2}$$

Since the product of slopes of AB and $BC = -2 . \frac{1}{2} = -$

$AB \perp BC$. $\therefore ABC$ is a right angled triangle.

3 The base of a triangle is the segment joini the points (—1, 0) and (9, 0). Find the third vert if the slopes of other sides are 1/2 and —2.

Let ABC be the given triangle with $B \equiv (-1, 0)$ a $C \equiv (9, 0)$. Let the slopes of AB and BC be 2 and—1 respectively.

If $A = (x_1, y_1)$ we have

$$\text{slope of } AB = 2 = \frac{y_1 - 0}{x_1 + 1}$$

$$\text{and slope of } AC = -\tfrac{1}{2} = \frac{y_1 - 0}{x_1 - 9}$$

so that $y_1 = 2x_1 + 2$ and $2y_1 = -x_1 + 9$ whic give $x_1 = 1$; $y_1 = 4$.

$$\therefore \quad A \equiv (1, 4).$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 $A(-1,1)$, $B(2,-1)$ ಮತ್ತು $C(1,1)$, $D(-2,3)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಭಾಗಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುವು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$AB\text{ಯ ಓಟ} = \frac{-1-1}{2+1} = -2/3$$

$$CD\text{ಯ ಓಟ} = \frac{3-1}{-2-1} = -2/3$$

ಇವೆರಡೂ ಸಮನಾಗಿವೆ $\therefore \quad AB \parallel CD$.

2 $A(0,2)$, $B(1,0)$ ಮತ್ತು $C(3,1)$ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನೇರ್ಪಡಿಸುವುವು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$AB\text{ಯ ಓಟ} = \frac{0-2}{1-0} = -2$$

$$BC\text{ಯ ಓಟ} = \frac{1-0}{3-1} = \frac{1}{2}$$

AB ಮತ್ತು BCಗಳ ಓಟಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು -1, ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $AB \perp BC$. $\therefore$ ABCಯು ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣ.

3 $(-1,0)$ ಮತ್ತು $(9,0)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಭಾಗವು ತ್ರಿಭುಜವೊಂದರ ಪಾದವಾಗಿದೆ. $\frac{1}{2}$, -2ಗಳು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಓಟಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಮೂರನೆಯ ಶೃಂಗವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

$B \equiv (-1, 0)$ ಮತ್ತು $C \equiv (9, 0)$ ಇರುವಂತೆ ABCಯು ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರಲಿ. AB ಮತ್ತು BCಗಳ ಓಟಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2 ಮತ್ತು $-\frac{1}{2}$ ಆಗಿರಲಿ. $A \equiv (x_1, y_1)$ ಆದರೆ

$$AB\text{ಯ ಓಟ} = 2 = \frac{y_1 - 0}{x_1 + 1}$$

ಮತ್ತು $$AC\text{ಯ ಓಟ} = -\frac{1}{2} = \frac{y_1 - 0}{x_1 - 9}$$

ಆಗ $y_1 = 2x_1 + 2$ ಮತ್ತು $2y_1 = -x_1 + 9$
ಇವುಗಳಿಂದ $x_1 = 1$, $y_1 = 4$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$$\therefore \quad A \equiv (1,4).$$

Exercises 5.2

1 Show that the line segments AB and CD a
parallel if

(i) $A \equiv (1, 2)$, $B \equiv (5, 4)$, $C \equiv (1, 3)$, $D \equiv (7, 6)$.
(ii) $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (4, -1)$, $C \equiv (-4, 0)$, $D \equiv (-8,$
(iii) $A \equiv (-1, -1)$, $B \equiv (5, -5)$, $C \equiv (-5, -5)$, $D \equiv (-2, -7)$.

2 Show that the line segments PQ and RS a
perpendicular if

(i) $P \equiv (0, 0)$, $Q \equiv (5, 6)$, $R \equiv (0, 0)$, $S \equiv (-6, 5)$.
(ii) $P \equiv (1, 2)$, $Q \equiv (3, 4)$, $R \equiv (1, -2)$, $S \equiv (0, -3)$
(iii) $P \equiv (-1, -2)$, $Q \equiv (-2, 4)$, $R \equiv (7, 6)$, $S \equiv (8, 1$

3 If $A \equiv (k, 0)$ and $B \equiv (1, 2)$, find k so that t
line segment AB may be (*a*) parallel to ; (*b*) perpendicu
to the line segments whose end points are P and Q whi
are given below.

(i) $P \equiv (1, 1)$, $Q \equiv (5, 6)$.
(ii) $P \equiv (1, 2)$, $Q \equiv (-1, -1)$.
(iii) $P \equiv (5, -6)$, $Q \equiv (-6, -7)$.

4 Which of the line segments joining the follow
four points are parallel ?

$A \equiv (3, 6)$, $B \equiv (5, 9)$, $C \equiv (8. 2)$, $D \equiv (6, -1)$.

5 The slopes of the lines L_1, L_2, L_3, L_4 are r
pectively $\frac{2}{3}$, -4, $-1\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{4}$. Point out which two li
are perpendicular ?

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 5.2

1 (i) $A \equiv (1,2)$, $B \equiv (5,4)$, $C \equiv (1,3)$, $D \equiv (7,6)$

(ii) $A \equiv (0,0)$, $B \equiv (4,-1)$, $C \equiv (-4,0)$, $D \equiv (-8,1)$

(iii) $A \equiv (-1,-1)$, $B \equiv (5,-5)$, $C \equiv (-5,-5)$, $D \equiv (-2,-7)$

ಆದಾಗ AB ಮತ್ತು CD ರೇಖಾಭಾಗಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

2 (i) $P \equiv (0,0)$, $Q \equiv (5,6)$, $R \equiv (0,0)$, $S \equiv (-6,5)$

(ii) $P \equiv (1,2)$, $Q \equiv (3,4)$, $R \equiv (-1,-2)$, $S \equiv (0,-3)$

(iii) $P \equiv (-1,-2)$, $Q \equiv (-2,4)$, $R \equiv (7,6)$, $S \equiv (8,19)$

ಆದಾಗ PQ ಮತ್ತು RS ರೇಖಾಭಾಗಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

3 $A \equiv (k,0)$, ಮತ್ತು $B \equiv (1,2)$ ಆದಾಗ, AB ರೇಖಾಭಾಗವು ಈ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವ P, Q ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುಗಳಾಗುಳ್ಳ ರೇಖಾಭಾಗಕ್ಕೆ (a) ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ, (b) ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ kಯನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

(i) $P \equiv (1,1)$ $Q \equiv (5,6)$

(ii) $P \equiv (1,2)$, $Q \equiv (-1,-1)$

(iii) $P \equiv (5,-6)$, $Q \equiv (-6,-7)$

4 ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಯಾವ ಎರಡು ರೇಖಾಭಾಗಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ ?

$A \equiv (3,6)$, $B \equiv (5,9)$, $C \equiv (8,2)$, $D \equiv (6,-1)$.

5 $\frac{2}{3}$, -4, $-1\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{4}$ ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ L_1, L_2 L_3, ಮತ್ತು L_4 ರೇಖೆಗಳ ಓಟಗಳಾಗಿವೆ. ಯಾವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆ ?

6 If Q is the point $(-1, -2)$ and if P is on the li[ne] parallel to the y-axis and 3 units to the right, find t[he] coordinates of P if the line joining P and Q is

(a) parallel to
(b) perpendicular to
the line joining $(-2, 3)$ and $(1, 1)$

7 Two opposite vertices of a square are $(4, 2)$ a[nd] $(3, -1)$. What are the coordinates of the other tw[o] vertices ?

5.3 Angle between two intersecting lines in terms of the slopes—

Let $m = \tan \alpha$ and $m' = \tan \beta$ be the slopes of tw[o] intersecting lines l and l'. Let ϕ be one of the angle betwe[en] them. Then we have $\phi = \pm (\beta - \alpha)$. The numeric[al] value of ϕ (*i.e.*, one of the angles between the lines regardle[ss] of direction) is $\beta - \alpha$.

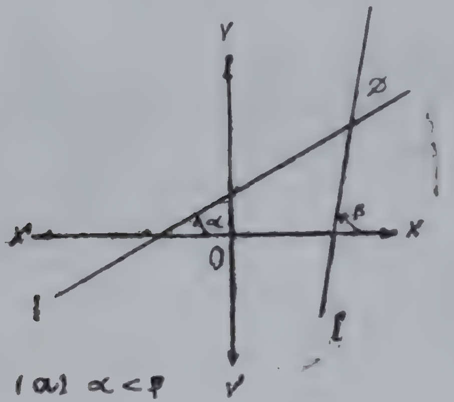


Fig. 5.3 (a)

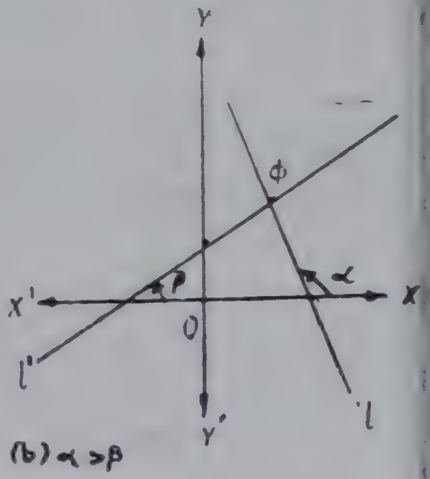


Fig. 5.3 (b)

$$\therefore \quad \tan \phi =^* \tan (\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha}$$

$$\boxed{i.e. \ \tan \phi = \frac{m' - m}{1 + mm'}}$$

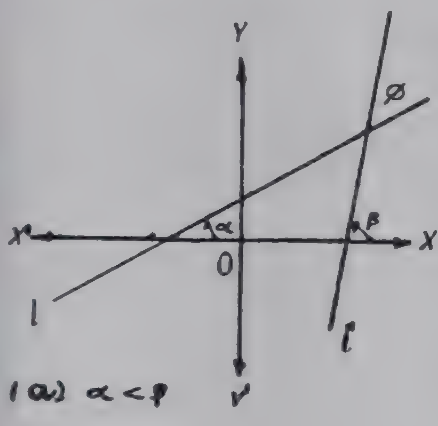
*See Sec. 9.2

6 $Q \equiv (-1, -2)$ ಆಗಿಯೂ P ಬಿಂದುವು y—ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಬಲಕ್ಕೆ 3 ಮಾನಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, PQ ರೇಖಾಭಾಗವು $(-2, 3)$, $(1, 1)$ ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ (i) ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ, (ii) ಲಂಬವಾಗಿ ಇರುವಂತೆ. P ಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

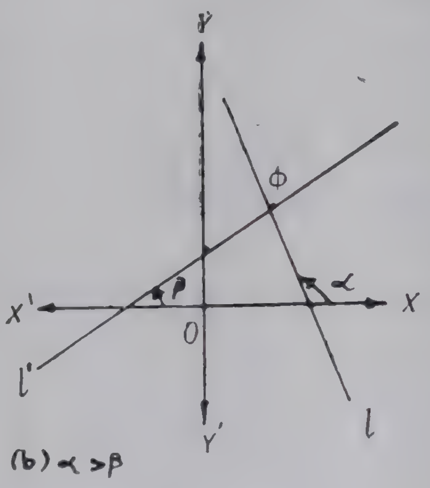
7 ಚೌಕವೊಂದರ ಅಭಿಮುಖ ಶೃಂಗಗಳು $(4, 2)$ ಮತ್ತು $(3, -1)$ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. ಉಳಿದೆರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೇನು ?

5.3 ಓಟಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಎರಡು ಛೇದನಾರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ

$m = \tan \alpha$ ಮತ್ತು $m' = \tan \beta$ ಎಂಬುವು l ಮತ್ತು l' ರೇಖೆಗಳ ಓಟಗಳಾಗಿರಲಿ. ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಕೋನವು ϕ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $\phi = \pm\ \beta - \alpha$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ϕನ ಸಂಖ್ಯಾಬೆಲೆಯು (ಅಂದರೆ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸದ. ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಕೋನವು) $\beta - \alpha$,



ಚಿತ್ರ 5.3 (a)



ಚಿತ್ರ 5.3 (b)

$$\therefore \quad \tan \phi = {}^*\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha}$$

ಅಂದರೆ $$\boxed{\tan \phi = \frac{m' - m}{1 + mm'}}$$

---

* *See* Sec, 9.2

This is the expression for one of the angles , ϕ between the lines whose slopes are m and m'.

The other angle is $(\pi-\phi)$ and it is given by

$$\tan(\pi-\phi) = -\tan\phi = \left[\frac{m'-m}{1+mm'}\right]$$

Here we may note that the angle is acute if its tangent is positive and it is obtuse if its tangent is negative.

We may observe here that if the lines are parallel, the angle between them is either zero, or π and so $\tan\phi=0$. This gives $\tan\phi = 0$ if the lines are perpendicular the angle between them $\frac{\pi}{2}$ and so $\tan\phi$ is not defined. This gives $1+mm'=0$.

Examples

1 Find the acute angle between the line segments joining A (0, 4), B (– 2, –2) and C (1,–2), D (–2, 4)

$$\text{Slope of } AB = m = \frac{4+2}{0+2} = 3$$

$$\text{Slope of } CD = m' = \frac{4+2}{-2-1} = -2$$

$\therefore$ If ϕ is the angle from AB to CD.

$$\tan\phi = \frac{-2-3}{1-6} = \frac{-5}{-5} = 1$$

It is positive and ϕ is acute and equal to 45°.

2 Show that the points A (–2, –6), B(–5, –2) and C (–1, 1) are the vertices of an isosceles rightangled triangle [*Vide* Exer. 4.2. Ex. 9]

ಇದು m ಮತ್ತು m'ಗಳು ಓಟಗಳಾಗಿರುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಕೋನ ϕ ಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ಕೋನವು $\pi-\phi$ ಆಗುವುದರಿಂದ ಅದನ್ನು $\tan(\pi-\phi) = -\tan\phi = -\left[\frac{m'-m}{1+mm'}\right]$ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು.

ಕೋನವು ಲಘುವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ಸ್ಪರ್ಶಜ್ಯಾ (tangent) ಧನವಾಗಿರುವುದೆಂದೂ; ಅದು ವಿಶಾಲವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ಸ ರ್ಶಜ್ಯಾ ಋಣವಾಗಿರುವುದೆಂದೂ ಗಮನಿಸಬೇಕು.

ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು ಶೂನ್ಯ ಅಥವಾ π ಆಗುವುದರಿಂದ $\tan\phi = 0$ ಆದುದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ $m' = m$. ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು $\frac{\pi}{2}$ ಆಗುವುದರಿಂದ $\tan\phi$ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ. ಇದರಿಂದ $1+mm'=0$ ಎಂದು ಗೋಚರವಾಗುತ ದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 $A(0, 4)$, $B(-2, -2)$ ಮತ್ತು $C(1, -2)$, $D(-2, 4)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಭಾಗಗಳ ನಡುವಿನ ಲಘುಕೋನವನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$AB\text{ಯ ಓಟ} = m = \frac{4+2}{0+2} = 3$$

$$CD\text{ಯ ಓಟ} = m' = \frac{4+2}{-2-1} = -2$$

ABಯಿಂದ CDಗಿರುವ ಕೋನದ ಪರಿಮಾಣ ϕ ಆದರೆ.

$$\tan\phi = \frac{-2-3}{1-6} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

ಇದು ಧನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ϕ ಲಘು ಕೋನವಾಗಿ ಅದರ ಪರಿಮಾಣ 45° ಆಗಿರು ದು.

$-2, -6)$, $B(-5, -2)$ ಮತ್ತು $C(-1, +1)$ ಬಿಂದುಗಳು ಸಮದ್ವಿಬಾಹುಲಂಬಕೋನತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ. [ಅಭ್ಯಾಸ 4.2ರ 9ನೇ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿ].

$$\text{Slope of } AB = m_1 = \frac{-2+6}{-5+2} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Slope of } BC = m_2 = \frac{1+2}{-1+5} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Slope of } CA = m_3 = \frac{1+6}{-1+2} = \frac{7}{1}$$

Clearly $m_1 m_2 = -1$

$$\therefore AB \perp BC, \quad \angle B = \frac{\pi}{2}$$

If ϕ is the angle from BC to CA;

$$\tan\phi = \frac{m_3 - m_2}{1 + m_2 m_3} = \frac{7-\frac{3}{4}}{1+7.\frac{3}{4}} = \frac{25}{25} = 1.$$

$\therefore \angle C = \phi = 45^\circ$.

Then clearly $\angle A = 45^\circ$.

$\therefore \angle A = \angle C = 45^\circ$ and $\angle B = \frac{\pi}{2}$

$\therefore ABC$ is an isoseles right triangle.

Exercises 5.3

1 Find the angle between the lines whose slopes are m and m' where

(i) $m = -2, \quad m' = \sqrt{3}$

(ii) $m = -\frac{1}{2}, \quad m' = 1$

(iii) $m = 1, \quad m'$ not defined.

2 Find the angle between the line segment joining (1,2), (3, 6) and the lines given in *Pbm* 1 of Exercises 5.1.

3 Find the angles of the triangle whose vertices are

(i) (1,−1), (−7, 7) and (5, 9)

(i) (0, 0), (−4, 0) and (2, 2)

(iii) (1, a), (3, a) and (2, −2)

$$AB\text{ಯ ಓಟ} = m_1 = \frac{-2+6}{-5+2} = -\frac{4}{3}$$

$$BC\text{ಯ ಓಟ} = m_2 = \frac{1+2}{-1+5} = \frac{3}{4}$$

$$CA\text{ಯ ಓಟ} = m_3 = \frac{1+6}{-1+2} = \frac{7}{1}$$

$m_1 m_2 = -1$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. $\therefore AB \perp BC,\ \angle B = \frac{\pi}{2}$

BC ಯಿಂದ CA ಗಿರುವ ಕೋನದ ಪರಿಮಾಣವು ϕ ಆದರೆ

$$\tan\phi = \frac{m_3 - m_2}{1 + m_2 m_3} = \frac{7 - \frac{3}{4}}{1 + 7.\frac{3}{4}} = \frac{25}{25} = 1.$$

$\therefore \angle C = \phi = 45^\circ.$

$\angle A = 45^\circ$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

$\therefore \angle A = \angle C = 45^\circ$ ಮತ್ತು $\angle B = \frac{\pi}{2}.$

$\therefore ABC$ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 5.3

1 (i) $m = -2,\quad m' = \sqrt{3}$

(ii) $m = -\frac{1}{2},\quad m' = 1$

(iii) $m = 1,\quad m'$ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ

ಆದಾಗ, m ಮತ್ತು m' ಗಳನ್ನು ಓಟಗಳಾಗುಳ್ಳ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

2 ಅಭ್ಯಾಸ 5.1 ರಲ್ಲಿನ 1ನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ರೇಖೆಗಳಿಂದ (1.2), (3.6) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾ ಭಾಗಕ್ಕಿರುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

3 (i) (1 – 1), (–7, 7) ಮತ್ತು (5, 9)

(ii) (0, 0), (–4, 0) ಮತ್ತು (2, 2)

(iii) (1, a), (3, a) ಮತ್ತು (2, –2)

ಬಿಂದುಗಳು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳೇನು ?

4 Use the formula of this section to prove that the points

(i) $(1, 1)$, $(-1, -1)$ and $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

(ii) $(1, 0)$, $(2, \sqrt{3})$ and $(3, 0)$

(iii) $(0, 0)$, $(4, 0)$ and $(2, 2\sqrt{3})$

form an equilateral triangle.

5 Use the formula of this section to prove that the points

(i) $(0, 1)$, $(-2, -2)$ and $(-2, 4)$

(ii) $(2, 8)$, $(10, 11)$ and $(5, 0)$

(iii) $(6, -5)$, $(2, -4)$ and $(5, -1)$

form an isosceles triangle.

5.4. How to represent a line by an equation—

One way of specifying a line in a plane is to give two points of it. Another way is to give a point and the inclination or slope of it *w.r.t.* a co-ordinate system in the plane. As we have already seen, two points of a line determine its slope. Therefore the first way is contained in the second way. Let us consider this fact to give an algebraic representation to a line.

Let l be a line through the point (x_1, y_1). Let (x, y) be any point of the line. Then

$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

Or $$\boxed{y-y_1 = m(x-x_1).}$$

4 ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ

(i) $(1, 1), (-1, -1)$ ಮತ್ತು $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

(ii) $(1, 0), (2, \sqrt{3})$ ಮತ್ತು $(3, 0)$

(iii) $(0, 0), (4, 0)$ ಮತ್ತು $(2, 2\sqrt{3})$

ಬಿಂದುಗಳು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವೊಂದರ ಶೃಂಗಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

5 ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ

(i) $(0, 1), (-2, -2)$ ಮತ್ತು $(-2, 4)$

(ii) $(2, 8), (10, 11)$ ಮತ್ತು $(5, 0)$

(iii) $(6, -5)$ $(2, -4)$ ಮತ್ತು $(5, -1)$

ಬಿಂದುಗಳು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವೊಂದರ ಶೃಂಗಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

5.4 ರೇಖೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ನಿರೂಪಿಸುವ ಬಗೆ.

ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತಗೊಳಿಸುವ ಒಂದು ವಿಧಾನವೆಂದರೆ ಅದರ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದು. ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನವೆಂದರೆ, ಅದರ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಹಾಗೂ ಆ ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ನಿರ್ದೇಶನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅದರ ಇಳಿವು ಅಥವಾ ಓಟವನ್ನು ಕೊಡುವುದು. ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ನೋಡಿರುವಂತೆ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಅದರ ಓಟವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ವಿಧಾನವು ಎರಡನೆಯ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಸೇರಿಹೋಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ನಾವು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಆ ಮೂಲಕ ರೇಖೆಗೆ ಒಂದು ಬೀಜ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಕೊಡೋಣ.

l ಎನ್ನುವುದು (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಒಂದು ರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ. (x, y) ಎನ್ನುವುದು l ಗೆ ಸೇರಿದ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

$m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅಥವಾ $\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$

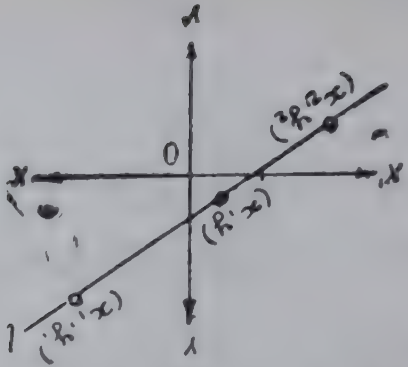


Fig. 5.4

This expression holds for each and every point (x, y) of the line l and does not hold good for any point (x, y) not on the line. Therefore the above equation represent the locus of the point (x, y), *viz.* the line l. We call such an equation as the equation of the line l. As the equation contains the slope and a point of the line, hereafter we call this equation as the '*point-slope*' equation of the line.

Cor. 1 : If l passes through (x_1, y_1) and (x_2, y_2) (See fig. 5.4) the point-slope equation gives

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$\text{Or} \quad \boxed{\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.}$$

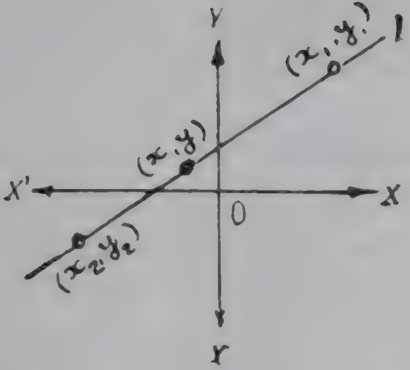
We call the equation of l in this form as the '*two-point equation.*

Cor. 2 : Let the distance of the variable point (x, y) of the line l from the fixed point (x_1, y_1) be r. Then from the fig. above we have $r\cos\alpha = x-x_1$, $r\sin\alpha = y-y_1$.
where α is the inclination of the line.

$$\text{Or} \quad \boxed{x = r\cos\alpha + x_1;\ y = r\sin\alpha + y_1}$$

These are called the '*parametric equations*' of the straight line l.

r is called the 'parameter'.



ಚಿತ್ರ 5.4

ಇದು l ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳು (x, y) ಗಳಿಗೂ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ ಮತ್ತು l ಮೇಲಿಲ್ಲದ ಯಾವ ಬಿಂದು (x, y) ಗೂ ಸರಿಹೊಂದುವುದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವು (x, y)ನ ಬಿಂದು ಪಥವನ್ನು ಅಂದರೆ l ರೇಖೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂತಹ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಾವು l ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣವು ರೇಖೆಯ ಓಟ ಮತ್ತು ಬಿಂದುವೊಂದನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ರೇಖೆಯ '<u>ಬಿಂದು-ಓಟ ಸಮೀಕರಣ</u>' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ,

<u>ಉ.ಪ್ರ</u>: 1. l ರೇಖೆಯು ಗೊತ್ತಿರುವ (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗಿಹೋದರೆ, (ಚಿತ್ರ 5·4 ನೋಡಿ) ಅದರ 'ಬಿಂದು-ಓಟ ಸಮೀಕರಣ' ವು

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

ಅಥವಾ $\boxed{\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

l ರೇಖೆಯ ಈ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಾವು '<u>ಎರಡು ಬಿಂದು ಸಮೀಕರಣ</u>' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

<u>ಉ. ಪ್ರ. 2</u>: ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದು (x_1, y_1) ನಿಂದ ಚರ ಬಿಂದು (x, y) ಗಿರುವ ದೂರವು r ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಿಂದ, ರೇಖೆಯ ಇಳಿವು α ಆದಾಗ, $r \cos \alpha = x-x_1$, $r \sin \alpha = y-y_1$

ಅಥವಾ $\boxed{x=r\cos\alpha+x_1;\ y=r\sin\alpha+y_1}$

ಇವುಗಳನ್ನು ಸರಳರೇಖೆಯ '<u>ಚರಾಂಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು</u>' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

r ನ್ನು 'ಚರಾಂಕ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

Note :—The equations of the line in the above thre forms hold good only for those which are not parallel t the y-axis, as we have defined the slope for such lin only.

We drive the equation of a line parallel to $0Y$.

Let a line parallel to $0\ Y$ cross the x-axis at the poin $(a,\ 0)$. Since the line is perpendicular to the x-axi every point of the line has the x—coordinate equal to a.

Also, any point not on the line will not have it x-coordinate equal to a. Hence the condition whic characterises this vertical line is $x=a$. This is therefor the equation of the line through $(a,\ 0)$ parallel to $0Y$.

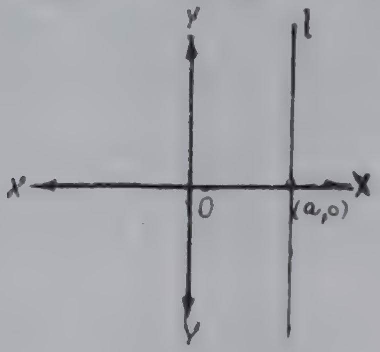


Fig 5.5

Examples

1. Find the equation of a line whose inclination i $\frac{\pi}{3}$ and which passes through the point $(1,\ 2)$.

Slope of the line is $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

$\therefore$ 'Slope-point equation' of the line is

$$y-2 = \sqrt{3}\ (x-1),$$

or $\sqrt{3}x-y+(2-\sqrt{3}) = 0$.

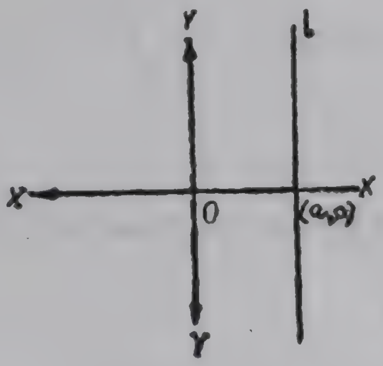
2 Find the equation of the line through $(1,\ -1$ perpendicular to the line through $(0,\ 0)$ and $(1,\ 2)$.

Slope of the given line is 2.

Slope of the required line is $-\frac{1}{2}$.

ಸೂಚನೆ : ನಾವು ಓಟವನ್ನು y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿಲ್ಲದ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ
ತ್ರ ನಿರ್ದಿಷ್ಟಗೊಳಿಸುವದರಿಂದ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಮೇಲಿನ ಮೂರು ರೂಪ
ಇಂತಹ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತವೆ. y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ
ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಮುಂದೆ ಹೇಳಿರುವಂತೆ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯೊಂದು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು $(a, 0)$ ಬಿಂದುವಿ
ಛೇದಿಸಲಿ. ಈ ರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ರೇಖೆಯ ಪ್ರತಿ
ದುವಿನ x-ನಿರ್ದೇಶಕವು a ಆಗಿರುವುದು. ಅಲ್ಲದೆ, ಈ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿಲ್ಲದ ಯಾವ
ದುವಿನ x-ನಿರ್ದೇಶಕವೂ a ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ರೇಖೆಯನ್ನು
ಷ್ಟಗೊಳಿಸುವ ನಿಬಂಧನೆಯು $x=a$ ಆಗಿದೆ. ಇದೇ $(a, 0)$ ಮೂಲಕ
ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ.



ಚಿತ್ರ 5.5

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 ಇಳಿವು $\frac{\pi}{3}$ ಆಗಿರುವಂತಹ, $(1, 2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು
ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಓಟ $= \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$\therefore$ ರೇಖೆಯ 'ಬಿಂದು-ಓಟ ರೂಪ'ದ ಸಮೀಕರಣವು

$$y-2=\sqrt{3}\,(x-1)$$

ಅಥವಾ $\sqrt{3}x-y+(2-\sqrt{3})=0$ ಎಂದಾಗುವುದು.

2 $(0, 0)$ ಮತ್ತು $(1, 2)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬ
ಗಿ $(1, -1)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು
ತ್ತುಮಾಡಿ.

ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಓಟ $= 2$.

$\therefore$ ಗೊತ್ತುಮಾಡಬೇಕಾದ ರೇಖೆಯ ಓಟ $= -\frac{1}{2}$.

$\therefore$ Its point-slope equation is

$y+1 = -\frac{1}{2}(x-1)$ or $x+2y+1 = 0$.

3 What is the equation of the line through the point (2, 2) making an angle 45° with the line through (−1, 0) and (0, 2)?

The slope of the given line $= \dfrac{2-0}{0+1} = 2$.

Let m be the slope of the required line.

Then, by hypothesis, $\tan 45° = 1 = \dfrac{m-2}{1-2m}$

i.e. $1-2m = m-2$,

or $3m=3$ or $m=1$.

$\therefore$ The '*point-slope equation*' of the line is $y-2=1$ $(x-2)$,

or $y=x$.

Exercises 5.4

1 Write down the equations of the lines passing through the points.

(i) A (5, 4) and B (2, 7),
(ii) A (−1, 3) and B (1, 3),
(iii) A (5, 8) and B (7, 8),
(iv) A (a, 0) and B (0, b),
(v) A (3, 7) and B (3, 12).

2 Write down the equation of the line with slope m and passing through the point P in the following cases.

(i) $m=4$, P (10, −2),
(ii) $m=-\frac{3}{4}$, P (6, 2),

∴ ಅದರ ಬಿಂದು-ಓಟ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣ

$$y+1=-\frac{1}{2}(x-1) \text{ ಅಥವಾ } x+2y+1=0.$$

3. $(-1, 0)$ ಮತ್ತು $(0, 2)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ $45°$ ಕೋನವನ್ನೇರ್ಪಡಿಸುವಂತೆ $(2, 2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವೇನು ?

ದತ್ತ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಓಟ $= \dfrac{2-0}{0+1} = 2.$

ಗೊತ್ತು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಓಟ m ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ ದತ್ತದ ಪ್ರಕಾರ $\tan 45° = 1 = \dfrac{m-2}{1-2m}$.

ಅಂದರೆ $1-2m = m-2$

ಅಥವಾ $3m = 3$

$\therefore m=1$

ಗೊತ್ತು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯ '<u>ಬಿಂದು-ಓಟ ಸಮೀಕರಣ</u>' ವು

$y-2=1(x-2)$.

ಅಥವಾ $y=x$.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 5·4

1 (i) $A(5, 4)$ ಮತ್ತು $B(2, 7)$;

(ii) $A(-1, 3)$ ಮತ್ತು $B(1, 3)$;

(iii) $A(5, 8)$ ಮತ್ತು $B(7, 8)$;

(iv) $A(a, 0)$ ಮತ್ತು $B(0, b)$;

(v) $A(\quad, 7)$ ಮತ್ತು $B(3, 12)$.

ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

2 ಓಟವು m ಆಗಿರುವಂತಹ ಮತ್ತು P ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $m=4, P(10, -2)$

(ii) $m=-\frac{3}{4}, P(6, 2)$

(iii) $m=\frac{2}{3}$, $P\ (-5,\ 2)$

(iv) $m=0$, $P\ (2,\ 6)$

(v) m not defined ; $P\ (3,\ 7)$.

3 Two lines are drawn through $(1, -2)$ respectively parallel and perpendicular to the $x-$axis. Find their equations.

4 A line makes an angle of measure $120°$ with the negative direction of $x-$axis. If it passes through the point $(1, 2)$, what is its equation ?

5 L_1 is a line through the points $(1, 1)$ and $(2, 2)$. L_2 is another line through the point $(1, 2)$. Find the equation of L_2 if

(i) L_2 is parallel to L_1

(ii) L_2 is perpendicular to L_1

(iii) L_2 makes an angle $45°$ with L_1.

6 The vertices of a triangle are $(9, 3)$, $(3, 6)$ and $(-1, -2)$. Find

(i) the equations of the sides.

(ii) the equations of the medians.

(iii) the equations of the altitudes.

5.5. Equation of a line in Standard forms[1]—

We give below a few standard forms of the equations which can be conveniently used to represent a line in a plane. These follow directly from any *one* of the three forms which we have derived in the previous section.

---

[1] The standard form of an equation of a line is one which involves minimum number of constants, namely two.

(iii) $m = \frac{4}{3}$, $P(-5, 2)$

(iv) $m = 0$, $P(2, 6)$

(v) m ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ; $P(3, 7)$.

3 $(1, -2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ x ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಮತ್ತು ಲಂಬವಾಗಿ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

4 ಒಂದು ರೇಖೆಯು $x-$ ಅಕ್ಷದ ಋಣ ದಿಕ್ಕಿನಿಂದ $120°$ ಯ ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡಿದೆ. ಅದು $(1, 2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋದರೆ ಅದರ ಸಮೀಕರಣವೇನು ?

5 L_1 ಎನುವುದು $(1, 1)$ ಮತ್ತು $(2, 2)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಒಂದು ರೇಖೆ. L_2 ಎನ್ನುವುದು $(1, 2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಇನ್ನೊಂದು ರೇಖೆ.

(i) L_2, L_1ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ ;

(ii) L_2, L_1ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ ;

(iii) L_2, L_1 ನೊಂದಿಗೆ $45°$ ಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡಿದರೆ,

L_2 ನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

6 $(9, 3)$, $(3, 6)$ ಮತ್ತು $(-1, -2)$ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿವೆ.

(i) ಅದರ ಬಾಹುಗಳ ; (ii) ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ; (iii) ಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

5·5 ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಸುಲಭ ರೂಪಗಳು[1]

ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯೊಂದನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಲು ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದಾದಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಕೆಲವು ಸುಲಭ ರೂಪಗಳನ್ನು ನಾವು ಈ ಕೆಳಗೆ ತಿಳಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸುಲಭ ರೂಪಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಪಡೆದಿರುವ ಮೂರು ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದರಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.

[1] ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಂದರೆ ಎರಡು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪವನ್ನು ಸುಲಭರೂಪವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(a) *Slope intercept form* :—

If a line is not parallel to either axis, it must meet the co-ordinate axes in two points which can be taken as $(a, 0)$ and $(0, b)$ a is called the *x-intercept* and b is called the *y-intercept*.

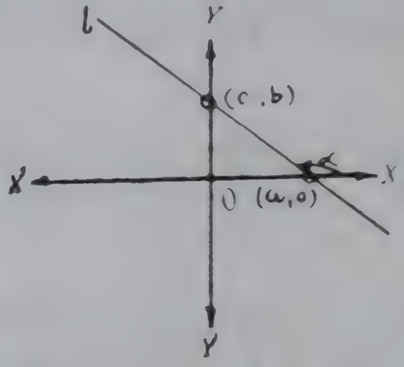


Fig. 5.6.

If we are given the point $(0, b)$ of a line l and its slope m, then the slope-point equation of l is $y-b=m\ (x-0)$.

$$\text{or} \quad \boxed{y=mx+b.}$$

This equation is called the '*Slope-intercept form of the equation*' of the line.

Cor. : (i) If l passes through 0, its equation is $y=mx$.

(ii) If l is parallel to the x—axis, its equation is $y=b$.

(iii) Equation of the x—axis is $y=0$.

(b) *Intercepts form* :—

If we are given the points $(a, 0)$ and $(0, b)$ of the line l in the above case, the 'two-point equation' of the line l is

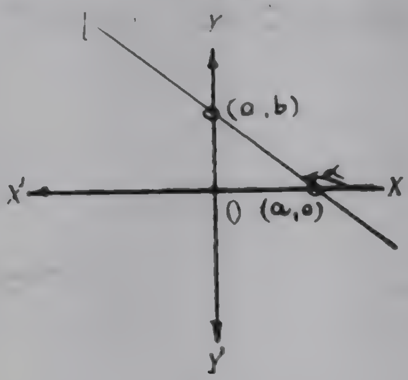
$$\frac{i\ -}{0-a} = \frac{y-0}{x-a}$$

$$\text{or } bx+ay = ab \quad \text{or} \quad \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.}$$

This equation is called the '*intercept form of the equation*' of the line.

(*a*) ಓಟ-ವಿಚ್ಛಿನ್ನ ರೂಪ :

ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಯಾವುದೇ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದು ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು (a, o) (o, b) ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. a ಯನ್ನು x-ವಿಚ್ಛಿನ್ನವೆಂದೂ, b ಯನ್ನು y-ವಿಚ್ಛಿನ್ನ ವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 5·6

ಈಗ ನಮಗೆ (o, b) ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಅದರ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಓಟವನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟರೆ, ಆ ರೇಖೆಯು ಬಿಂದು-ಓಟ ಸಮೀಕರಣವು

$$y-b=m\,(x-o)$$

ಅಥವಾ $\boxed{y=mx+b}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಾವು l ರೇಖೆಯ ಓಟ—ವಿಚ್ಛಿನ್ನರೂಪದ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉ.ಪ್ರ.—(i) l ರೇಖೆಯು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹೋದರೆ ಅದರ ಸಮೀಕರಣ $y=mx$.

(ii) l ರೇಖೆಯು $x-$ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ಸಮೀಕರಣ $y=b$.

(iii) $x-$ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣ $y=o$.

(*b*) ವಿಚ್ಛಿನ್ನತಾ ರೂಪ.—

ಮೇಲಿನ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ l ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ (a, o) ಮತ್ತು (o, b) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟರೆ, ಅದರ ಎರಡು ಬಿಂದುರೂಪದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$\frac{b-o}{o-a}=\frac{y-o}{x-a}$$

ಅಥವಾ $bx+ay=ab$ ಅಥವಾ $\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಾವು l ರೇಖೆಯ ವಿಚ್ಛಿನ್ನತಾ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(c) *Normal form* :—

If a line which does not pass through the origin is neither parallel to the x—axis nor the y—axis, there exists a normal of length p $(\neq 0)$ with slope $k = \tan \alpha$ from the origin to the line $(0 < \alpha < \pi,\ \alpha \neq \pi/2)$.

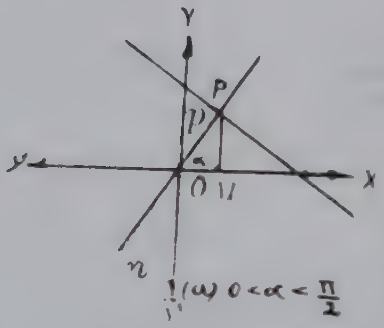


Fig 5.7 (*a*)

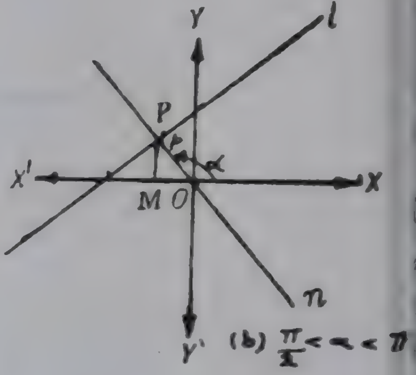


Fig 5.7 (*b*)

Let the foot of such a normal be P.

Then we can easily see (from Fig. 5.7) that

$$P \equiv [p \cos \alpha,\ p \sin \alpha].$$

Also, the slope of the line is $-\dfrac{1}{k} = -\cot \alpha$.

$\therefore$ If we are given p and α, the point-slope equation gives

$$y - p \sin \alpha = (-\cot \alpha)\,(x - p \cos \alpha)$$

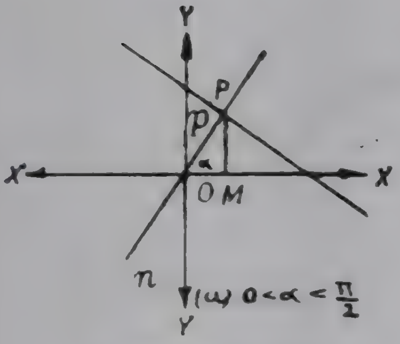
or $$\boxed{x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.}$$

We call this as the '*Normal form*' of the equation of a line.

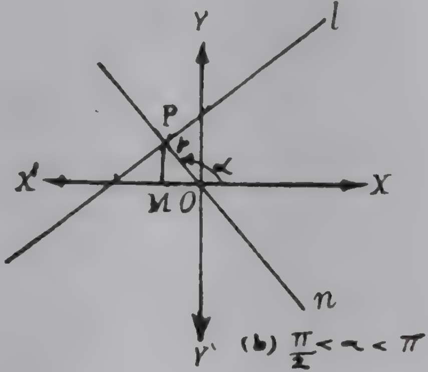
Note :—Look at the fig. 5.8. There are two lines l and l' having the common normal $P'OP$ through O

(c) <u>ಲಂಬ ರೂಪ</u> :

ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹೋಗದ ಒಂದು ರೇಖೆಯು x—ಅಕ್ಷಕ್ಕಾಗಲಿ, y—ಅಕ್ಷಕ್ಕಾಗಲೀ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆ ರೇಖೆಗೆ $p(\neq 0)$ ಉದ್ದವುಳ್ಳ ಮತ್ತು $k=\tan\alpha$ $(0<\alpha<\pi,\ \alpha\neq\pi/2)$ ಓಟವುಳ್ಳ ಲಂಬವೊಂದು ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 5.7 (a)



ಚಿತ್ರ 5.7 (b)

ಅಂತಹ ಲಂಬವೊಂದರ ಪಾದ P ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $P\equiv(p\cos\alpha, p\sin\alpha)$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ನೋಡಬಹುದು. (ಚಿತ್ರ 5·7 ನೋಡಿ)

ಅಲ್ಲದೆ ರೇಖೆಯ ಓಟ $-\dfrac{1}{k}=-\cot\alpha$ ಆಗಿರುವುದು.

$\therefore$ p ಮತ್ತು α ಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ರೇಖೆಯ ಬಿಂದು-ಓಟ ಸಮೀಕರಣವು

$$y-p\sin\alpha=(-\cot\alpha)\ (x-p\cos\alpha)$$

ಅಥವಾ $\boxed{x\cos\alpha+y\sin\alpha=p}$ ಆಗುವುದು.

ಇದನ್ನು ನಾವು ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ‹<u>ಲಂಬ ರೂಪ</u>' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

<u>ಸೂಚನೆ:</u> ಚಿತ್ರ 5·8ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ $P'\ O\ P$ ಯನ್ನು O ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಂಬವಾಗುಳ್ಳ l ಮತ್ತು l' ಎಂಬ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿವೆ.

Let $OP = OP' = p$ and the slope of $P'OP$ be $\tan \alpha$.

Then the equation of l is $x \cos\alpha + y \sin \alpha = p$. (1)

The equation of l' is also $x \cos\alpha + y \sin \alpha = p$. (2)

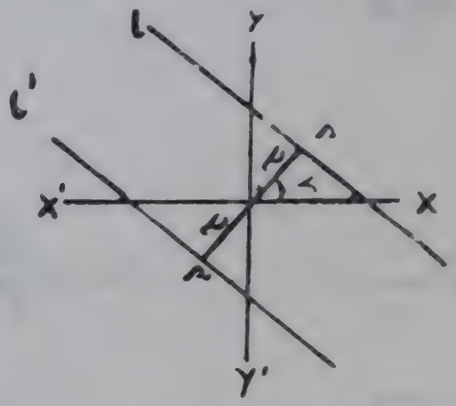


Fig. 5.8

At first sight these two equations of l and l' lead us to conclude that the same equation may represent two lines, which contradicts the basic concept of analytic geometry. But if we consider them carefully as detailed below, it becomes clea that the two equations are distinct and the fict that they repres two different lines becomes confirmed.

In the line l, since the foot of the normal, namely P, lies in the first quadrant, both of its co-ordinates are positive, *i.e.*, $p \cos \alpha$, $p \sin \alpha > 0$. Since $\alpha < \pi/2$, $\sin \alpha$, $\cos \alpha > 0$. $\therefore p > 0$ here.

In the line l' since the foot of the normal, namely, P' lies in the third quadrant, both of its co-ordinates are negative, *i.e.*, $p \cos \alpha$, $p \sin \alpha < 0$. Since $\alpha < \pi/_2$ here also, $\sin \alpha$, $\cos \alpha > 0$. $\therefore$ $p < 0$ in this case.

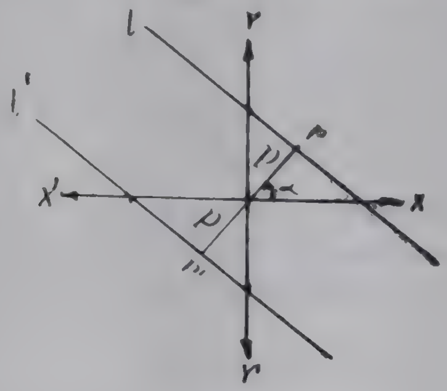
Thus $p > 0$ in equation (1) and $p < 0$ in equation (2).

$\therefore$ (1) and (2) represent two distinct line.

$OP = OP' = p$ ಮತ್ತು $P'OP'$ ಯ ಓಟ $\tan \alpha$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ l ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ (1)

l' ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವೂ $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ (2)



ಚಿತ್ರ 5.8

ಇಲ್ಲಿ l ಮತ್ತು l' ಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು ತಕ್ಷಣಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಎಂದು ಕಂಡುಬಂದು, ಒಂದೇ ಸಮೀಕರಣವು ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು ಎಂಬ ಬೀಜರೇಖಾ ಗಣಿತದ ಮೂಲತತ್ವಕ್ಕೇ ವಿರುದ್ಧವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಕ್ಕೆ ದಾರಿ ಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ ಅವೆರಡೂ ನಿಜವಾಗಿಯೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ, ಅವು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಥಿರಪಡುತ್ತದೆ.

l ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಲಂಬದ ಪಾದವು, ಅಂದರೆ P ಯು, ಮೊದಲನೆಯ ಪಾದದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ, ಅದರ ಎರಡೂ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, $p \cos \alpha, p \sin \alpha > 0$. ಇಲ್ಲಿ $\alpha < \pi/2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\sin \alpha$, $\cos \alpha > 0$. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ $p > 0$.

l' ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಲಂಬದ ಪಾದವು, ಅಂದರೆ P' ಯು, ಮೂರನೆಯ ಪಾದದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ, ಅದರ ಎರಡೂ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ $p \cos \alpha, p \sin \alpha < 0$. ಇಲ್ಲಿಯೂ $\alpha < \pi/2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $\sin \alpha$, $\cos \alpha > 0$. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ $p < 0$.

ಆದ್ದರಿಂದ (1) ನೆಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $p > 0$ ಆಗಿಯೂ, (2) ನೆಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $p < 0$ ಆಗಿಯೂ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ (1) ಮತ್ತು (2) ಗಳು ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತವೆ.

Similarly we can show that a line which has the foot of normal in the second quadrant has $p>0$ and a line which has the foot of the normal in the fourth quadrant has $p<0$.

The above considerations reveal that, in the equation $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, p is not only a 'distance', but also a 'directed distance'. It is positive if it is measured from the origin to a point in the first or second quadrant and it is negative if it is measured from the origin to a point in the third or fourth quadrant.

Thus if we write $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ as the equation of a line, we always mean that p is attached with a sign (*i.e.*, p is a directed distance) and α ($\neq \pi/2$) is measured from 0 to π only.

Examples

1 Write down the equation of the line, given that the foot of the normal from the origin to the line is [4, 3].

Let the equation of the line be

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

The foot of the normal, then, is $[p \cos \alpha, p \sin \alpha]$.

$\therefore \quad p \cos \alpha = 4 ; \quad p \sin \alpha = 3.$

Also, $p^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ and so $p = \pm 5$.

The foot of the normal is in the first quadrant.

$\therefore \quad p > 0.$

$\therefore \quad p = 5, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}; \ \sin \alpha = \frac{3}{5}$

$\therefore$ Equation of the line is $\quad x \cdot \frac{4}{5} + y \cdot \frac{3}{5} = 5$

or $\quad 4x + 3y - 25 = 0.$

Aliter : Slope of the normal is $\frac{3}{4}$

$\therefore$ Slope of the line is $-\frac{4}{3}$

$\therefore$ Its equation has the form $y = -\frac{4}{3}x + c$.

This passes through (4, 3).

$$\therefore \quad 3 = -\frac{4}{3} \cdot 4 + c \quad \text{or} \quad c = \frac{25}{3}$$

$$\therefore \quad \text{The equation of the line is } y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$$

or $\quad 4x + 3y - 25 = 0.$

ಹೀಗೆಯೇ ಎರಡನೆಯ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಲಂಬದ ಪಾದವನ್ನುಳ್ಳ ರೇಖೆಗೆ $p > 0$ ಆಗಿಯೂ, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಲಂಬದ ಪಾದವನ್ನುಳ್ಳ ರೇಖೆಗೆ $p<0$ ಆಗಿಯೂ ಇರುತ್ತದೆ.

ಈ ಮೇಲಿನ ಪರಿಶೀಲನೆಗಳಿಂದ, $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ p ಎಂಬುದು 'ದೂರ' ಮಾತ್ರವೇ ಅಲ್ಲ, ಅದೊಂದು 'ಸೂಕ್ತ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದೊಡಗೂಡಿದ ದೂರ' ಅಂದರೆ 'ನಿರ್ದೇಶಿತ ದೂರ' ಎಂದು ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು 0 ನಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ಅಥವಾ ಎರಡನೆಯ ಪಾದದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಅಳೆದಾಗ ಅದು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ, ಅದನ್ನು 0 ನಿಂದ ಮೂರನೆಯ ಅಥವಾ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪಾದದಲ್ಲಿನ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಅಳೆದಾಗ, ಅದು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ, $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ ಎಂಬುದನ್ನು ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿ ಬರೆದಾಗ, p ಯು ಸೂಕ್ತ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದೊಡಗೂಡಿದೆ (ಅಂದರೆ, ಅದೊಂದು ನಿರ್ದೇಶಿತ ದೂರ) ಎಂದೂ α $(\neq \pi/2)$ ವನ್ನು 0 ಯಿಂದ π ವರೆಗೆ ಮಾತ್ರ ಅಳೆಯುತ್ತೇವೆ ಎಂದೂ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಪಾದವು (4, 3) ಆಗಿದೆ, ಆ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, ಲಂಬದ ಪಾದವು $[p \cos \alpha, p \sin \alpha]$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$\therefore \quad p \cos \alpha = 4$ ಮತ್ತು $p \sin \alpha = 3$.

ಅಲ್ಲದೆ, $p^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ ಅಥವಾ $p = \pm 5$.

ಲಂಬದ ಪಾದವು ಮೊದಲನೆಯ ಪಾದದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ, $p>0$.

$\therefore \quad p=5, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}, \sin \alpha = \frac{3}{5}$

$\therefore$ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ, $x \cdot \frac{4}{5} + y \cdot \frac{3}{5} = 5$

ಅಥವಾ $4x + 3y - 25 = 0$.

ಎರಡನೆಯ ವಿಧಾನ :

ದತ್ತ ಲಂಬದ ಓಟ $= \frac{3}{4}$. $\therefore$ ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಓಟ $= -\frac{4}{3}$.

$\therefore$ ಅದರ ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪ $y = -\frac{4}{3}x + c$

ಈ ರೇಖೆಯು (4, 3) ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದರಿಂದ,

$$3 = -\tfrac{4}{3} \cdot 4 + c \quad \text{ಅಥವಾ} \quad c = \tfrac{25}{3}.$$

$\therefore$ ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ :

$$y = -\tfrac{4}{3}x + \tfrac{25}{3} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad 4x + 3y - 25 = 0.$$

2. Write down the equation of a line, given that the part of the line intercepted between the coordinate axes is divided at (5, —1) in the ratio 1 : 3.

Let $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ be the equation of the given line so that the part of the line intercepted between the axes has the end points (a, o) and (o, b).

The point which divides this line segment in the ratio 1 : 3 is

$$\left[\frac{1.0+3.a}{3+1}, \frac{1.b+3.0}{3+1}\right] \text{ or } \left[\frac{3a}{4}, \frac{b}{4}\right]$$

But this point is given to be (5,—1)

$$\therefore \quad \frac{3a}{4} = 5 \text{ or } a = \frac{20}{3}$$

$$\text{and } \frac{b}{4} = -1 \text{ or } b = -4.$$

$$\therefore \quad \text{Equation of the line is } \frac{x}{\left(\frac{20}{3}\right)} + \frac{y}{(-4)} = 1$$

$$\text{or} \qquad 3x - 5y - 20 = 0.$$

3 A line through (2, 1) cuts off in the first quadrant a triangle of area 4 sq. units. Find its equation.

Let the line meet the axes at $(a, 0)$ and $(0, b)$.

Its equation can be taken as $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

The area cut off in the first quadrant is $\frac{1}{2}ab$.

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}ab=4 \text{ or } ab=8 \quad \text{.... (1)}$$

2 ಅಕ್ಷಗಳ ನಡುವೆ ವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾಭಾಗವನ್ನು $(5, -1)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $1 : 3$ ರ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಸಮೀಕರಣ ವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ ಅಕ್ಷಗಳ ನಡುವಿನ ರೇಖೆಯ ವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯ ಬಿಂದುಗಳು (a, o) ಮತ್ತು (o, b) ಆಗುತ್ತವೆ.

ಈ ರೇಖಾಭಾಗವನ್ನು $1 : 3$ ರ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವು

$$\left[\frac{1.0 + 3.a}{3+1}, \ \frac{1.b + 3.0}{3+1}\right] \text{ ಅಥವಾ } \left[\frac{3a}{4}, \ \frac{b}{4}\right]$$

ಆದರೆ, ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು $(5, -1)$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$\therefore \ \frac{3a}{4} = 5 \quad \text{ಅಥವಾ } a = \frac{20}{3}$$

$$\text{ಮತ್ತು } \frac{b}{4} = -1 \quad \text{ಅಥವಾ } b = -4.$$

$$\therefore \ \text{ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ } \quad \frac{x}{\left(\frac{20}{3}\right)} + \frac{y}{(-4)} = 1$$

$$\text{ಅಥವಾ } 3x - 5y - 20 = 0.$$

3 $(2, 1)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ರೇಖೆಯು ಮೊದಲನೆಯ ಪಾದದಲ್ಲಿ 4 ಚದರ ಮಾನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನೇರ್ಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಅದರ ಸಮೀಕರಣ ವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

ದತ್ತರೇಖೆಯು ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು $(a, 0)$ ಮತ್ತು $(0, b)$ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.

ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಮೊದಲನೆಯ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{1}{2}\, a\, b$.

$$\therefore \ \tfrac{1}{2}\, a\, b = 4 \text{ ಅಥವಾ } ab = 8. \quad \ldots (1)$$

Since the line passes through (2, 1),

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1 \text{ or } 2b+a=ab \ldots (2)$$

$\therefore$ (1) and (2) give $a = 4$ and $b = 2$.

$\therefore$ Equation of the line $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ or

$$x + 2y = 4.$$

Exercises 5.5

1 Write down the equation of the line given its slope m and its y- intercept, b.

(i) $m=5,\quad b=-2$

(ii) $m=-4,\quad b=10$

(iii) $m=0,\quad b=-6$

(iv) $m=-8,\quad b=0.$

(v) $m=10,\quad b=-5$

(vi) $m=0,\quad b=0.$

2 Write down the equation of the line whose intercepts on the axes are as given below :

(i) 2, 3

(ii) $-1, -1$

(iii) $-2, 8$

(iv) a, a

(v) $p \sec a, p \operatorname{cosec} a.$

(vi) $\frac{1}{m}, -1$

3 Write down the equation of the line given its perpendicular distance p from the origin and the inclination of the normal.

(i) $p=1,\ a=45°$

(ii) $p=-3,\ a=30°$

(iii) $p=\sqrt{8},\ a=135°$

(iv) $p=-6,\ a=60°$

(v) $p=-5,\ a=150°$

(vi) $p=-5,\ a=30°$

4 A starigth line cuts the y- axis at a distance of 3 units below the origin and is parallel to the bisector of the angle XOY. Find its equation.

ರೇಖೆಯು (2, 1) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದರಿಂದ

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1 \text{ ಅಥವಾ } 2b+a=ab \quad . . . (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ $a=4$, $b=2$.

$\therefore$ ರೇಖೆಯು ಸಮೀಕರಣ $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$

ಅಥವಾ $x+2y=4$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 5·5

1 ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ಓಟ m ಮತ್ತು y-ವಿಚಿನ್ನ b ಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಅದರ ಸಮೀಕರಣಪನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $m=5$, $b=-2$ (iv) $m=-8$, $b=0$.

(ii) $m=-4$, $b=10$ (v) $m=10$, $b=-5$.

(iii) $m=0$, $b=-6$ (vi) $m=0$, $b=0$.

2 ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ ಒಂದು ರೇಖೆಯು ವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಆದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) 2, 3 (iv) a, a

(ii) -1, -1 (v) $p \sec \alpha$, $p \operatorname{cosec} \alpha$

(iii) -2, 8 (vi) $\frac{1}{m}$, -1

3 ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ರೇಖೆಗೆಳೆದ ಲಂಬದ ಪರಿಮಾಣ p ಮತ್ತು ಅದರ ಇಳಿವು α ವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಆ ಸರಳರೇಖೆಯು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $p=1$, $\alpha=45°$ (iv) $p=-6$, $\alpha=60°$

(ii) $p=-3$, $\alpha=30°$ (v) $p=-5$, $\alpha=150°$

(iii) $p=\sqrt{8}$, $\alpha=135°$ (vi) $p=-5$, $\alpha=30°$

4 XOY ಕೋನದ ಅರ್ಧಕಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ರೇಖೆಯು y— ಅಕ್ಷವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಕೆಳಗೆ 3 ಮಾನಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಅದರ ಸಮೀಕರಣವೇನು ?

5 Show that the equation of lines, the reciprocals of whose intercepts on the axes are l, m is $lx + my = 1$.

6 The x- intercept of a line is half its y- intercept. If it passes through $(-1, 2)$, what is its equation ?

7 The portion of a line intercepted between the co-ordinate axes has its mid point at $(-1, 2)$. Write down its equation.

8 Find an equation of the line which passes through $(1, 1)$ and forms, together with the axes, a triangle of area 10.

9 Write down the equation of the line given that foot of the normal to it from the origin is

(i) $(5, -4)$; (ii) $(-1, 4)$; (iii) $(-4, -4)$.

5.6 The General Equation of the First Degree—

In the last two sections we obtained the equation of a line in different forms. In each case we got a linear equation in x, y. Hence we may say that the equation of a line is a linear equation. Let us see that the converse is also true. *viz.* : any linear equation in x and y is an equation of a line in a plane.

$ax+by+c=0$ is the most general equation of first degree in x and y.

If $a=0$ $(b \neq 0)$; the equation may be written as $y = -\frac{b}{c}$ which represents a line through $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ parallel to x-axis.

5 ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲಿನ ವಿಚ್ಛಿನ್ನಗಳ ಪ್ರತಿಲೋಮಗಳಾಗಿ l, m ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $lx + my = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6 ಒಂದು ರೇಖೆಯ x—ವಿಚ್ಛಿನ್ನವು y ವಿಚ್ಛಿನ್ನದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿದೆ. ಆ ರೇಖೆಯು $(-1, 2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗಿದರೆ ಅದರ ಸಮೀಕರಣವೇನು ?

7 ಅಕ್ಷಗಳ ನಡುವೆ ವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾಭಾಗದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವು $(-1, 2)$ ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಸಮೀಕರಣವೇನು ?

8 $(1, 1)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಅಕ್ಷಗಳೊಂದಿಗೆ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲ 10 ನ್ನುಂಟು ಮಾಡುವ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನೇರ್ಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಅದರ ಸಮೀಕರಣವೇನು?

9 (i) $(5, -4)$; (ii) $(-1, 4)$, (iii) $(-4, -4)$ ಬಿಂದುವನ್ನು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದೆಳೆದ ಲಂಬದ ಪಾದವನ್ನಾಗುಳ್ಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

5·6 ಏಕ ಪ್ರಮಾಣದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಮಿಾಕರಣ

ಹಿಂದಿನ ಎರಡು ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮಿಾಕರಣವನ್ನು ವಿವಿಧ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆದೆವು. ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ನಾವು x, y ನಲ್ಲಿ ಏಕಪ್ರಮಾಣದ್ದಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ರೇಖೆಯ ಸಮಿಾಕರಣವು ಏಕ ಪ್ರಮಾಣದ್ದಾಗಿರುವುದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಇದರ ವಿಲೋಮ ಅಂದರೆ x, y ನಲ್ಲಿ ಏಕ ಪ್ರಮಾಣದ್ದಾದ ಯಾವ ಸಮಿಾಕರಣವೇ ಆಗಲಿ ಅದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ರೇಖೆಯೊಂದರ ಸಮಿಾಕರಣವಾಗುವುದು ಎನ್ನುವುದೂ ನಿಜವಾಗಿರುವುದೆಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನೋಡೋಣ.

$ax + by + c = 0$ ಎನ್ನುವುದು x, y ನಲ್ಲಿ ಏಕ ಪ್ರಮಾಣ ಸಮಿಾಕರಣದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೂಪ.

$a = 0$, $(b \neq 0)$ ಆದರೆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $y = -\dfrac{c}{b}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಾದುದರಿಂದ ಅದು $\left(0, -\dfrac{c}{b}\right)$ ಮೂಲಕ x ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವಾಗುತ್ತದೆ.

If $b=0$, $(a \neq 0)$; the equation may be written as $x = -\frac{c}{a}$ which represents a line through $\left(-\frac{c}{a}, 0 \right)$ parallel to the y- axix.

If $a \neq 0$, $b \neq 0$; the equation may be written as $y = -\frac{a}{b} x - \frac{c}{b}$ which represents a line through $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ with slope $-\frac{a}{b}$

Thus in all cases $ax+by+c=o$ represents some line in the plane. Hence we can take $ax+by+c=o$ as the general form of the equation of a line. We shall here after take the equation of a line in that form itself.

We shall now find the distance from the origin to the line represented by the general equation.

The general form of the equation of a line is

$$ax+by+c=0. \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

Normal form of the equation of the line is

$$x \cos a + y \sin a = p. \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

(1) and (2) represent the same line. Therefore, we have,

$$\frac{\cos a}{a} = \frac{\sin a}{b} = -\frac{p}{c}.$$

$$\therefore \quad \cos a = -\frac{ap}{c} ; \sin a = -\frac{bp}{c}.$$

$$\therefore \quad \cos^2 a + \sin^2 a = 1 = \left(\frac{a^2+b^2}{c^2}\right) p^2$$

$$\therefore \quad p = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$b=o, a\neq o$ ಆದರೆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $x = -\frac{c}{a}$ ಎಂದು ಬರೆಯುಬಹು ದಾದುದರಿಂದ ಅದು $\left(-\frac{c}{a},\ 0\right)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ OY ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರ ವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯು ಸಮೀಕರಣವಾಗುತ್ತದೆ.

$a\neq o, b\neq o$ ಆದರೆ ; ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $y = -\frac{a}{b}\ x - \frac{c}{b}$ ಎಂದು ಬರೆಯುಬಹುದಾದುದರಿಂದ ಅದು $-\frac{a}{b}$ ಯನ್ನು ಓಟವಾಗುಳ್ಳ ಹಾಗೂ ಹಾಗೂ $\left(o, -\frac{c}{b}\right)$ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ರೇಖೆಯು ಸಮೀಕರಣವಾಗುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ $ax+by+c=0$ ಸಮೀಕರಣವು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $ax+by+c=0$ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕರೂಪ ವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ನಾವು ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿಯೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವೆವು.

ಈಗ ನಾವು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣವು ನಿರೂಪಿಸುವ ರೇಖೆಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ರೇಖೆಯು ಸಮೀಕರಣದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೂಪವು $ax+by+c=0$ (1)

ಅದೇ ರೇಖೆಯು ಸಮೀಕರಣದ ಲಂಬರೂಪವು $x\cos\alpha+y\ \sin\alpha\ -p=0$ (2)

ಈ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

(1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದರೆ $\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\sin\alpha}{b} = -\frac{p}{c}$

$$\therefore\quad \cos\alpha = -\frac{ap}{c}\ ;\ \sin\alpha = -\frac{bp}{c}$$

$$\therefore\quad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 = \left(\frac{a^2+b^2}{c^2}\right)p^2$$

$$\therefore\quad p = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Now $\sin\alpha = -b\left(\frac{p}{c}\right) = -b\left(\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

Since $0<\alpha<\pi$, $\sin\alpha>0$.

$\therefore$ If $b>0$, the expression in the bracket should be negative *i.e.*, it should be $-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\therefore$ In this case $p = -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\therefore$ If, in the equation $ax+by+c=0$, $b>0$; the length of the perpendicular measured from the origin to the line is $-\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Similarly if $b<0$, $p = +\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Examples

1 Find the points where the line $2x+3y-5=0$ meets the co-ordinate axes. Find the distance between them.

The given equation may be written as

$$\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}y=1 \text{ or } \frac{x}{(\frac{5}{2})}+\frac{y}{(\frac{5}{3})}=1$$

which is of the form $x/a+y/b=1$.

$\therefore$ $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{5}{3}$.

$\therefore$ The points where the line meets the axes are $(a, 0)$, $(0, b)$ *i.e.* $(\frac{5}{2}, 0)$ and $(0, \frac{5}{3})$.

Distance between them is

$$\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{25}{9}} = 5\sqrt{\frac{13}{36}}$$

ಈಗ $\sin \alpha = -b\left(\frac{p}{c}\right) = -b\left(\pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

$0 < \alpha < \pi$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\sin \alpha > 0$.

$\therefore$ $b > 0$ ಆದಾಗ ಆವರಣದೊಳಗಿನ ಬೀಜವಾಕ್ಯವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬೇಕಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ಅದು $-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ಎಂದಿರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore$ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $p = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore$ $ax + by + c = 0$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $b > 0$ ಆದಾಗ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ರೇಖೆಗಿರುವ ಲಂಬ ದೂರವು $-\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $b < 0$ ಆದಾಗ $p = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 $2x + 3y - 5 = 0$ ರೇಖೆಯು ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಅವುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನೂ ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\frac{2x}{5} + \frac{3y}{5} = 1$

ಅಥವಾ $\frac{x}{(\frac{5}{2})} + \frac{y}{(\frac{5}{3})} = 1$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದರಿಂದ ಅದು

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ರ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore a = \frac{5}{2}; \quad = \frac{5}{3}.$

$\therefore$ ರೇಖೆಯು ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು $(a, 0)$, $(0, b)$ ಅಂದರೆ $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{5}{3}\right)$

ಅವುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರ $\sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{9}} = 5\sqrt{\frac{13}{36}}$

2 Find the length and slope of the normal drawn from the origin to the line $2x-3y+5=0$. Find the foot of the normal also.

Let us reduce the given equation to the Normal form.

Let the normal form be $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ .... (1)

The given equation is $2x-3y+5=0$ . . . . (2)

Comparing (1) and (2),

$$\frac{\cos\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{-3} = \frac{-p}{5}; \quad \cos\alpha = \frac{-2p}{5}, \quad \sin\alpha = \frac{3p}{5}$$

$$\therefore \quad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 = \frac{4p^2+9p^2}{5^2} = \frac{13p^2}{25}$$

$$\therefore \quad p^2 = \frac{25}{13}; \quad p = \pm 5\sqrt{\frac{1}{13}}$$

Here since $b = -3$, $p = \frac{5}{\sqrt{13}}$

Also $\tan\alpha = \frac{3p}{-2p} = -\frac{3}{2}$

This is the slope of the normal. Foot of the normal is $[p \cos\alpha, \; p \sin\alpha] \equiv \left[\frac{-10}{13}, \frac{15}{13}\right]$

Exercises 5.6

1 For each equation given below, (i) write an equivalent equation in slope-intercept form ; (ii) determine its slope ; (iii) find the intercepts on the axes ; (iv) write down the equation to the perpendicular line through the point where it meets the *x-axis*.

(i) $5x+3y-6=0$

(ii) $18x+6y-12=0$

(iii) $3x-5y=0$

(iv) $8-2y=6x$

(v) $(x-4)^2+y=(x+2)^2+6$

(vi) $(y+3)^2=(y+4)^2+x$

2 $2x-3y+5=0$ ಸಮೀಕರಣವು ನಿರೂಪಿಸುವ ರೇಖೆಗೆ ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಓಟಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಮೊದಲು ಲಂಬರೂಪಕ್ಕೆ ತರೋಣ.

ಲಂಬರೂಪವು $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ (1) ಆಗಿರಲಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣ $2x-3y+5=0$ (2).

(1), (2) ನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದರೆ

$$\frac{\cos \alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{-3} = \frac{-p}{5}\ ; \ \cos \alpha = \frac{-2p}{5}, \ \sin \alpha = \frac{3p}{5}$$

$$\therefore \cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1 = \frac{4p^2}{5^2} + \frac{9p^2}{5^2} = \frac{13p^2}{25}$$

$$\therefore p^2 = \frac{25}{13} \quad \therefore p = \pm 5\sqrt{\frac{1}{13}}.$$

ಇಲ್ಲಿ $b=-3$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $p = \dfrac{5}{\sqrt{13}}$.

$$\therefore \tan \alpha = \frac{3p}{-2p} = \frac{-3}{2}$$

ಇದೇ ಲಂಬದ ಓಟ.

ಲಂಬದ ಪಾದ $[p \cos \alpha, p \sin \alpha] \equiv \left[\frac{-10}{13}, \frac{15}{13}\right]$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 5·6

1 ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ (a) ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾದ ಓಟ-ವಿಚ್ಛಿನ್ನ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ, (b) ಅದರ ಓಟವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ, (c) ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲಿನ ವಿಚ್ಛಿನ್ನಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ, (d) ಅದು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸೇರುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $5x+3y-6=0$ (iv) $8-2y=6x$

(ii) $18x+6y-12=0$ (v $(x-4)^2+y= x+2)^2+6$

(iii) $3x-5y=0$ (vi) $(y+3)^2=(y+4)^2+x$

2 Which pairs of lines in the above example are parallel and which are perpendicular?

Find the distance of each of the lines in P*bm* 1 from the origin. Find the coordinates of the foot of the perpendicular in each case.

4 Show that the normal from the origin to the line segment joining the points $(a \cos \alpha, a \sin \alpha)$ and $(a \cos \beta, a \sin \beta)$ bisects it.

5 The line $x - y\sqrt{3} + 6 = 0$ meets the axes in A and B. Find (i) $\angle XAB$, (ii) $\triangle\ AOB$ (iii) p.

6 If p is the length of the perpendicular from the origin to the line $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, show that $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

7 Using an arbitary parameter find the general equation of

(i) the line parallel to $ax+by+c=0$.

(ii) the line perpendicular to $ax+by+c=0$.

(iii) the line which is at a constant distance from O

(iv) the line which makes a constant intercept on the *x-axis*.

(v) the line which makes a given angle α with the x—*axis*.

(vi) the line for which the sum of the intercepts is a.

8 What is the equation of a line which is parallel to (i) $x+2y=1$. (ii) $4x=3y$ and passes through (1. 4)

9 Write down the equations of the lines through $(4, -6)$ and respectively parallel and perpendicular to $4x - 7y = 1$.

2 ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿನ ಯಾವ ರೇಖಾದ್ವಯಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಯಾವುವು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆ ?

3 1ನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿರೇಖೆಯು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಷು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿ. ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ ಲಂಬದ ಪಾದದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

4 ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ $(a \cos \alpha, a \sin \alpha)$ ಮತ್ತು $(a \cos \beta, a \sin \beta)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಭಾಗಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ಆ ರೇಖಾಭಾಗವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5 $x - y\sqrt{3} + 6 = 0$ ರೇಖೆಯು ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು A ಮತ್ತು B ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. (i) $\angle XAB$; (ii) $\triangle AOB$, (iii) p ಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

6 p ಎನ್ನುವುದು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಉದ್ದವಾದರೆ, $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7 (i) $ax + by + c = 0$ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ;

(ii) $ax + by + c = 0$ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ;

(iii) ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಥಿರ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ;

(iv) x— ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಸಿರ ವಿಛಿನ್ನ a ಯನ್ನುಂಟುಮಾಡುವ ;

(v) x— ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ ದತ್ತಕೋನ α ವನ್ನುಂಟುಮಾಡುವ ;

(vi) ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲಿನ ವಿಛಿನಗಳ ಮೊತ್ತ a ಆಗಿರುವಂತಹ

ರೇಖೆಯ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸ್ವಚ್ಛಂದ ಸಿರಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಬರೆಯಿರಿ.

8 (i) $x + 2y = 1$ (ii) $4x = 3y$

ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ (1, 4) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವೇನು ?

9 $(4, -6)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಕ್ರಮವಾಗಿ $4x - 7y = 1$ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಮತ್ತು ಲಂಬವಾಗಿ ಸಾಗುವ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

10 Show that the distance from the origin to the line joining (x_1, y_1) and (x_2, y_2) is

$$\frac{|x_1 y_2 - x_2 y_1|}{\sqrt{[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2]}}$$

5.7 Distance of a Point from a Line—

Let $ax+by+c=0$ be the equation of a line l. Let $Q \equiv (x_1, y_1)$ be a point in the plane. Then the equation of a line through Q parallel to l will be of the form

$$ax+by+c'=0$$

Let P and P' be the feet of the perpendiculars drawn from O to l and l'.

Then, if $b>0$ (if not multiply it by -1 and make $b>0$),

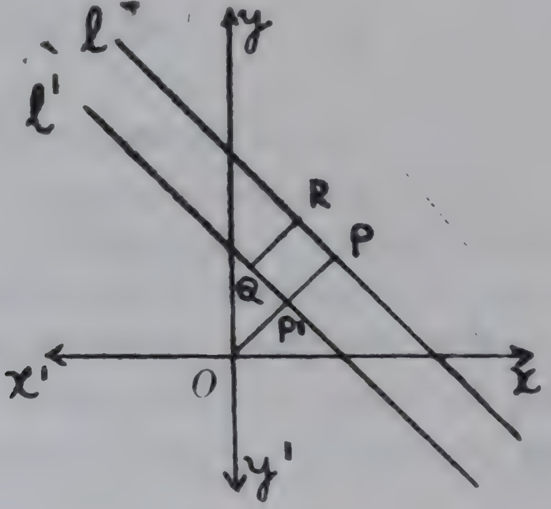


Fig. 5.9

$$\vec{OP} = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ and } \vec{OP'} = \frac{-c'}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Since O, P, P' are in the same line, we have

$$\vec{PP'} = \vec{OP'} - \vec{OP} \quad (\textit{Vide } \text{Sec. } 4.1)$$

$$= \frac{-c'}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{c-c'}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

10 (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಭಾಗದಿಂದ ಮೂಲಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವು

$$|x_1y_2 - x_2y_1| / \sqrt{[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]}$$

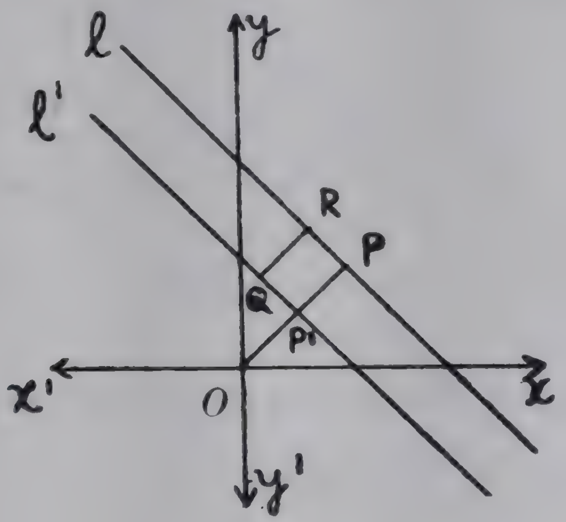
ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5·7 ರೇಖೆಯೊಂದರಿಂದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರ

$ax+by+c=0$ ಎನ್ನುವುದು l ಎನ್ನುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿರಲಿ. $Q\ (x_1, y_1)$ ಎನ್ನುವುದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ Q ಮೂಲಕ lಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆ l'ನ ಸಮೀಕರಣವು

$ax+by+c'=0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವುದು.

P ಮತ್ತು P'ಗಳು O ನಿಂದ l ಮತ್ತು l' ಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳ ಪಾದಗಳಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 5.9

ಆಗ $b>o$ ಆಗಿದ್ದರೆ,
(ಹಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದಾಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು -1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $b>o$ ಆಗುವಂತೆ ಮಾಡಿದರೆ)

$$\overrightarrow{OP} = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ ಮತ್ತು } \overrightarrow{OP'} = \frac{-c'}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

O, P, P' ಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}. \quad (4\cdot1\text{ನೇ ಪ್ರಕರಣದಿಂದ})$$

$$= \frac{-c'}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{c-c'}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Since $Q(x_1, y_1)$ is on the line l', $ax_1+by_1+c'=0$ and so $c'=-(ax_1+by_1)$

$$\therefore \ \overrightarrow{PP'} = \frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Similarly, if we take $ax+by+c=0$ with $b<0$,

$$\overrightarrow{PP'} = -\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

If we are interested in the distance of P' from l, then

$$PP' = |\overrightarrow{PP'}| = \left|\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}.\right|$$

Aliter : Shift the origin to $Q(x_1, y_1)$ and call the new co-ordinates X, Y. Then $x=X+x_1$, $y=Y+y_1$.

Then, the equation $ax+by+c=0$ becomes

$$a(X+x_1)+b(Y+y_1)+c=0$$

$$\text{or } aX+bY+(ax_1+by_1+c)=0.$$

Let $QL \perp l$.

$\therefore$ Distance of the line from the new origin *viz.*, Q is

$$\overrightarrow{QL} = \pm\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

As already stated, if $b>0$; the directed distance from Q to l is

$$-\frac{ax_1+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{LQ} = -\overrightarrow{QL} = \frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

and if $b<0$, it is $\dfrac{ax_1+by_4+c_1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

$$\text{i.e. } \overrightarrow{LQ} = -\frac{ax_1+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$Q(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವು l' ನಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ, $ax_1+by_1+c'=0$ ಅಂದರೆ $c'=-(ax_1+by_1)$ ಆಗಿರುವುದು.

$$\therefore \quad \overrightarrow{PP'} = \frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}} .$$

ಇದರಂತೆಯೇ $ax+by+c=0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $b<o$ ಇರುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, $\overrightarrow{PP'} = -\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ತೋರಿಸಬಹುದು.

ನಮಗೆ l ನಿಂದ P' ಗಿರುವ ದೂರ (ಚಿಹ್ನೆಯಿಲ್ಲದ) ಮಾತ್ರ ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ಅದು $PP' = |\overrightarrow{PP'}| = \left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$ ಆಗಿರುವುದು.

ಎರಡನೆಯ ವಿಧಾನ: ಮೂಲ ಬಿಂದುವನ್ನು $Q(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಪಲ್ಲಟವಮಾಡಿ ಹೊಸ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು X, Y ಗಳೆಂದು ಕರೆದರೆ,

$$x=X+x_1, \; y=Y+y_1.$$

ಆಗ $ax+by+c=0$ ಸಮೀಕರಣವು $a(X+x_1)+b(Y+y_1)+c=0$ ಅಥವಾ $aX+bY+(ax_1+by_1+c)=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಹೊಸ ಮೂಲ ಬಿಂದುವಾದ Q ಯಿಂದ ರೇಖೆಗೆ ಇರುವ ಲಂಬ ದೂರ

$$\pm \frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ಹಿಂದೆಯೇ ಹೇಳಿರುವ ಸಂಕೇತದಂತೆ $b>0$ ಆದಾಗ Q ನಿಂದ l ಗಿರುವ ನಿರ್ದೇಶಿತ ಲಂಬ ದೂರವು $-\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\text{ಅಂದರೆ} \quad \overrightarrow{LQ} = -\overrightarrow{QL} = \frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ಮತ್ತು $b<0$ ಆದಾಗ ಈ ದೂರವು $+\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$$\text{ಅಂದರೆ} \quad \overrightarrow{LQ} = -\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} .$$

1 Show that the points $A(2, -5)$ and $B(-1, -8)$ are equi-distant from the line $3x+y+5=0$. Find whether these points lie on the same side or on opposite sides of the line?

Let AP and BQ be the normals drawn from the given points to the given line. Since $b>0$ in the given eqn.,

$$\overrightarrow{PA} = \frac{3.2+1(-5)+5}{\sqrt{9+1}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$\overrightarrow{QB} = \frac{3(-1)+1(-8)+5}{\sqrt{9+1}} = -\frac{6}{\sqrt{10}}.$$

Signs of $\overrightarrow{PA}$ and $\overrightarrow{QB}$ are opposite.

$\therefore$ A and B lie on opposite sides of the line.

$$\text{And } |\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{QB}| = \frac{6}{\sqrt{10}}.$$

[In such cases we say that one point is the image of the other point in the line.]

2 If p_1 and p_2 are the distances of the point $(x_1\ y_1)$ from the straight lines $x+y=0$ and $x-y=0$ and if $p_1 p_2=-1$, show that $x_1^2-y_1^2=\pm 1$.

Here $p_1=\pm(x_1+y_1)$ and $p_2=\pm\ (x_1-y_1)$

$\therefore\ p_1p_2=\{\pm(x_1+y_1)\}\ \{\pm(x_1-y_1\}\ =-1$
or $x_1^2-y_1^2=\pm 1$.

3 Obtain a formula for the perpendicular distance between the parallel lines l: $ax+by+c=0$ and
l':$k\ (ax+by)+d=0$.

Hence find the distance between

$$5x-1=y \text{ and } 2y=10x+3.$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 $A(2,-5)$ ಮತ್ತು $B(-1,-8)$ ಬಿಂದುಗಳು $3x+y+5=0$ ರೇಖೆಯಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಇವೆರಡೂ ಬಿಂದುಗಳು ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಕಡೆಗಿವೆಯೋ ಅಥವಾ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕಡೆಗಿವೆಯೋ ತಿಳಿಸಿ.

A ಮತ್ತು B ಗಳಿಂದ ದತ್ತ ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದಿರುವ ಲಂಬಗಳು AP ಮತ್ತು BQ ಆಗಿರಲಿ. ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $b=1>0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\overrightarrow{PA} = \frac{3.2+1.(-5)+5}{\sqrt{9+1}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$\overrightarrow{QB} = \frac{3.(-1)+1(-8)+5}{\sqrt{9+1}} = -\frac{6}{\sqrt{10}}$$

ಇವೆರಡರ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿವೆ.

$\therefore$ $\overrightarrow{PA}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{QB}$ ಗಳ ದಿಕ್ಕುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿರುವುದರಿಂದ A, B ಗಳು ರೇಖೆಯ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕಡೆಗಿವೆ.

ಅಲ್ಲದೆ, ಇವುಗಳಿಂದ ರೇಖೆಗಿರುವ ದೂರವು (ಚಿಹ್ನೆಯಿಲ್ಲದೆ) ಸಮವಾಗಿದೆ.

[ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.]

2 $p_1 p_2 = -1$ ಆಗಿರುವಂತೆ p_1, p_2 ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x+y=O$ ಮತ್ತು $x-y=O$ ರೇಖೆಗಳಿಗಿರುವ ದೂರಗಳಾದರೆ, $x_1^2-y_1^2=\pm 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$p_1 = \pm(x_1+y_1)$ ಮತ್ತು $p_2 = \pm(x_1-y_1)$

$\therefore \quad \{\pm(x_1+y_1)\}\ \{\pm(x_1-y_1)\} = p_1 p_2 = -1$

ಅಥವಾ $x_1^2-y_1^2=\pm 1$

3 $l : ax+by+c=O$ ಮತ್ತು $l' : k(ax+by)+d=O$ ಈ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಲಂಬ ದೂರವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ದೂರವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $5x-1=y$ ಮತ್ತು $2y=10x+3$ ರೇಖೆಗಳಿರುವ ದೂರವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

Let (x_1, y_1) be a point on l.

$\therefore\ ax_1+by_1+c=0.$

The distance from this point to the line l is

$$\left|\frac{kax_1+kby_1+d}{k\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{k(-c)+d}{k\sqrt{a^2+b^2}}\right| \quad (\because\ ax_1+by_1+c=0)$$

$$=\left|\frac{\frac{d}{k}-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

In the given lines $5x-y-1=0$ and $10x-2y+3=0$ we have $k=2$.

$\therefore$ Distance between them is $\left|\dfrac{\frac{3}{2}+1}{\sqrt{5^2+1^2}}\right|=\dfrac{5}{2\sqrt{26}}$

Exercises 5.7

1 Find the distance of the given point from the given line in each of the following :—

(i) $(0, 1)$, $5x+4y=1$

(ii) $(2, -1)$, $x=y$

(iii) $(-4, 8)$, $6x+3y=112$

(iv) $(5, 3)$, $x=-y+4$

(v) $(4, 0)$, $5x-y-8=0$.

2 Find the perpendicular distance between the following parallel lines.

(i) $x+y=8$, $2x+2y+5=0$

(ii) $4x+y-5=0$, $8x+2y+1=0$

(iii) $x+12y=0$; $3x+36y+5=0$.

(x_1, y_1) ಬಿಂದುವು l ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಾಗಲಿ.

ಅಂದರೆ $ax_1 + by_1 + c = o$.

ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ l' ರೇಖೆಗಿರುವ ದೂರ $= \left| \dfrac{k(ax_1 + by_1) + d}{\sqrt{k^2a^2 + k^2b^2}} \right|$

$$= \left| \frac{k(-c) + d}{k\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \quad [\because c = -(ax_1 + by_1)]$$

$$= \left| \frac{\frac{d}{k} - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

ದತ್ತ ರೇಖೆಗಳು $5x - y - 1 = o$ ಮತ್ತು $10x - 2y + 3 = o$.

ಇಲ್ಲಿ $k = 2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

ರೇಖೆಗಳಿರುವ ಲಂಬದೂರ $= \left| \dfrac{\frac{3}{2} + 1}{\sqrt{5^2 + 1^2}} \right| = \dfrac{5}{2\sqrt{26}}$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 5·7

1 ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ದತ್ತರೇಖೆಗಿರುವ ಲಂಬದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(0, 1)$; $5x + 4y = 1$

(ii) $(2, -1)$; $x = y$.

(iii) $(-4, 8)$; $6x + 3y = 112$.

(iv) $(5, 3)$; $x = -y + 4$.

(v) $(4, 0)$; $5x - y - 8 = 0$.

2 ಕೆಳಗೆ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿಗಿರುವ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x + y = 8$; $2x + 2y + 5 = 0$.

(ii) $4x + y - 5 = 0$; $8x + 2y + 1 = 0$.

(iii) $x + 12y = 0$; $3x + 36y + 5 = 0$.

3 Show that the product of the lengths of the normals drawn from the points $(\pm 4, 0)$ to the line

$$3x \cos\theta + 5y \sin\theta = 75 \text{ is } 9.$$

4 Verify whether the points (3, 4) and (+2, −6) lie on the same side of $3x-4y=8$.

5 Show that the point (3, −5) is in between the lines $2x+3y=7$ and $2x+3y+12=0$.

6 Show that the triangle formed by the points (3, 7), (−3, −1) and (−1, −1) lies entirely on one side of the line $3x-8y=7$.

7 What is the image of the point (2, 1) in the line $2x-3y+1-0$.

8 $2x-3y-4=0$ is the perpendicular bisector of the line segment AB. If $A\equiv(5, 6)$, find B.

5. 8 Intersection of Two Lines—

Let
$$ax+by+c=0 \quad \ldots\ (1)$$
$$a'x+by+c'=0. \quad \ldots\ (2)$$
be two lines in a plane. Their slopes are respectively

$$\frac{-a}{b},\ \frac{-a^1}{b^1} \quad \ldots\ (3)$$

$\therefore$ If $\frac{a'}{b'} \neq \frac{a'}{b'}$, (1) and (2) determine two intersecting lines. Let us find out the point of intersection and the angle between them in such a case.

Let (x_1, y_1) be the point of intersection. Then, since this point lies on both the lines, x_1, y_1 satisfy both the equations.

i.e. $ax_1+by_1+c=0$

and $a'x_1+b'y_1+c'=0$

$$\text{or } \frac{x_1}{bc'-b'c} = \frac{y_1}{ca'-c'a} = \frac{1}{ab'-a'b}$$

$$\text{or } x_1 = \frac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\ y_1 = \frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$$

3 $(\pm 4, 0)$ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ $3x \cos\theta + 5y \sin\theta = 15$ ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 9 ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4 $(3, 4)$ ಮತ್ತು $(2, -6)$ ಬಿಂದುಗಳು $3x - 4y = 8$ ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವಕ್ಕಿವೆಯೇ ನೋಡಿ ?

5 $(3, -5)$ ಬಿಂದುವು $2x + 3y = 7$ ಮತ್ತು $2x + 3y + 12 = 0$ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6 $(3, 7)$, $(-3, -1)$ ಮತ್ತು $(-1, -1)$ ಬಿಂದುಗಳಿಂದೇರ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜವು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ $3x - 8y = 7$ ರೇಖೆಯ ಒಂದು ಪಾರ್ಶ್ವಕ್ಕಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7 $2x - 3y + 1 = 0$ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ $(2, 1)$ ಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರತಿ ಬಿಂಬವೇನು ?

8 $2x - 3y - 4 = 0$ ರೇಖೆಯು AB ರೇಖಾಭಾಗದ ಲಂಬ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದೆ. $A \equiv (5, 6)$ ಆದರೆ B ಯನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

5·8 ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ

$$ax + by + c = 0, \qquad (1)$$

ಮತ್ತು $a'x + by + c' = 0 \qquad (2)$

ಗಳು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಅವುಗಳ ಓಟಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{-a}{b}$ ಮತ್ತು $-\frac{a'}{b'}$ .... (3)

$\therefore \quad \frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$ ಆದಾಗ (1) ಮತ್ತು (2) ಪರಸ್ಪರ ಛೇಧಿಸುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ. ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವನ್ನು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನೂ ಈಗ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

(x_1, y_1) ಎಂಬುದು ಅವೆರಡರ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಈ ಬಿಂದುವು ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ, x_1, y_1 ಗಳು ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತವೆ.

ಅಂದರೆ, $ax_1 + by_1 + c = 0$

ಮತ್ತು $a'x_1 + b'y_1 + c' = 0$

ಅಥವಾ $$\frac{x_1}{bc' - b'c} = \frac{y}{ca' - c'a} = \frac{1}{ab' - a'b}$$

ಅಥವಾ $$x_1 = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}\ ;\ y_1 = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}$$

∴ The point of intersection of two intersectin lines $ax+by+c=0$ and $a'x+b'y+c'=0$ is

$$\boxed{\left[\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}, \frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}\right]}$$

(*Note*: that here also it follows that if $ab'=a'b$, *i.e.* if the slopes are equal, the point of intersection is undefine and so the lines become parallel).

Now, from (3), we have that if $\left(\frac{-a}{b}\right)\cdot\left(\frac{-a'}{b'}\right)=-1$ is not true, the angle between (1) and (2) is different from $\frac{\pi}{2}$. In such a case, if θ be the angle between them, we have (from Sec. 5.3),

$$\tan\theta = \frac{\frac{-a'}{b'} - \left(\frac{-a}{b}\right)}{1+\left(\frac{-a}{b}\right)\left(\frac{-a'}{b'}\right)} = \frac{ab'-a'b}{bb'+aa'}$$

Thus, the angle between the two intersecting lines $ax+by+c=0$ and $a'x+b'y+c'=0$ is given by

$$\boxed{\tan\theta = \frac{ab'-a'b}{aa'+bb'}}$$

[*Note*: that here also it follows that, if $aa'+bb'=0$, *i.e.*, if the product of the slopes is -1, the tangent of the angle between the lines is undefined and so the lines become perpendicular.]

Examples

1. Show that the equation of the line through the origin making an angle ϕ with the line $y=mx+b$ is

$$\frac{y}{x} = \frac{m+\tan\phi}{1-m\tan\phi}$$

Find the point of intersection.

$\therefore$ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ $ax+by+c=0$ ಮತ್ತು $a'x+b'y+c'=0$ ರೇಖೆಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದು

$$\boxed{\left[\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\ \frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}\right]}$$ ಆಗಿರುವುದು.

[$ab'=a'b$ ಆದಾಗ ಅಂದರೆ ಓಟಗಳು ಸಮನಾದಾಗ, ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವು ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗುವುದರಿಂದ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗುವುವು ಎಂಬುದು ಇಲ್ಲಿಯೂ ಗೋಚರವಾಗುವುದೆಂದು ಗಮನಿಸಿ.]

ಈಗ, $$\left(-\frac{a}{b}\right)\left(\frac{-a'}{b'}\right)=-1$$

ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ (1) ಮತ್ತು (2) ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು ಲಂಬ ಕೋನಕ್ಕಿಂತ ಬೇರೆಯಾಗಿರುವುದು ಎಂದು (3) ರಿಂದ ತಿಳಿಮ ಬರುತ್ತದೆ. ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಕೋನದ ಪರಿಮಾಣವು θ ಆಗಿದ್ದರೆ, (5.3ನೇ ಪ್ರಕರಣದಿಂದ)

$$\tan\theta=\frac{-\frac{a'}{b'}-\left(-\frac{a}{b}\right)}{1+\left(-\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{a'}{b'}\right)}=\frac{ab'-a'b}{bb'+aa'}$$

ಹೀಗೆ, ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ $ax+by+c=o$ ಮತ್ತು $a'x+b'y+c'=o$ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು

$$\boxed{\tan\theta=\frac{ab'-a'b}{aa'+bb'}}$$

($aa'+bb'=o$ ಆದರೆ, ಅಂದರೆ ಓಟಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು -1 ಆದರೆ, ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನದ ಸ್ಪರ್ಶ ಜ್ಯಾವು (tangent) ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗುವುದರಿಂದ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗುವುದೆಂದು ಇಲ್ಲಿಯೂ ಗೋಚರವಾಗುವುದು.)

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಹಾಗೂ $y=mx+b$ ರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ϕ ಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ.

$$\frac{y}{x}=\frac{m+\tan\phi}{1-m\tan\phi}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ, ಈ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

Let the line through the origin making an angle with $y=mx+b$ has its equation $y=m'x$.

$$\text{Then, } \tan\phi=\frac{m'-m}{1+m'm}$$

i.e., $m'(1-m\tan\phi)=m+\tan\phi$

$$\therefore\ m'=\frac{m+\tan\phi}{1-m\tan\phi}$$

$$\therefore\ \frac{y}{x}=\frac{m+\tan\phi}{1-m\tan\phi}$$

is the required equation.

The two lines are $y=mx+b$.

$$y=\left\{\frac{m+\tan\phi}{1-m\tan\phi}\right\}x$$

Solving we get

$$\frac{x}{-b}=\frac{y}{-b\left[\dfrac{m+\tan\phi}{1-m\tan\phi}\right]}=\frac{1}{-m+\left(\dfrac{m+\tan\phi}{1-m\tan\phi}\right)}$$

$\therefore$ The point of intersection is

$$\left\{\frac{-b}{\dfrac{m+\tan\phi}{1-m\tan\phi}-m},\ \frac{-\left[\dfrac{m+\tan\phi}{1-m\tan\phi}\right]}{\dfrac{m+\tan\phi}{1-m\tan\phi}-m}\right\}$$

2. Find the distance of the line $5x+8y-1=0$ from the point (2, 1) measured along a line whose slope is 1.

Any line through (2, 1) with slope 1 has the equation $y-1=1(x-2)$ *i.e.* $x-y-1=0$.

The point of intersection of this with the given line is, (by solving $x-y-1=0$ and $5x+8y-1=0$)

$$\left[\frac{9}{13},\ \frac{-4}{13}\ .\right]$$

Distance of this point from (2, 1) is

$$\left[\left(\frac{9}{13}-2\right)^2+\left(\frac{-4}{13}-1\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

This is the required distance.

$y=mx+b$ ರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ϕ ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡುವ ಮತ್ತು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $y=m'x$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ $\tan \phi = \dfrac{m'-m}{1+mm'}$

ಅಂದರೆ $m' \; (1-m \tan \phi) = (m + \tan \phi)$

ಅಥವಾ $m' = \dfrac{m+ \tan \phi}{1-m \tan \phi}$.

$$\therefore \quad \frac{y}{x} = m' = \frac{m + \tan \phi}{1-m \tan \phi}.$$

ಈಗ, $y=\left\{\dfrac{m+\tan\phi}{1-m \tan\phi}\right\}x$

ಮತ್ತು $y=mx+b$ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ,

$$\frac{x}{-b} = \frac{y}{-b\left[\dfrac{m+\tan\phi}{1-m \tan\phi}\right]} = \frac{1}{-m+\left(\dfrac{m+\tan\phi}{1-m \tan\phi}\right)}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore$ ರೇಖೆಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದು

$$\left\{\frac{-b}{\dfrac{m+\tan\phi}{1-m \tan\phi}-m}, \; \frac{-b\left[\dfrac{m+\tan\phi}{1-m \tan\phi}\right]}{\dfrac{m+\tan\phi}{1-m \tan\phi}-m}\right\}$$

2 (2, 1) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $5x+8y-1=0$ ರೇಖೆಗೆ ಓಟವು 1 ಆಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಅಳೆಯಬಹುದಾದ ದೂರವೇನು ?

(2, 1) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಹಾಗೂ ಓಟ 1 ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $y-1=1\;(x-2)$ ಅಥವಾ $x-y-1=0$.

ಈ ರೇಖೆಯ ಮತ್ತು ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಸಂಗಮ ಬಿಂದು, ($x-y-1=0$ ಮತ್ತು $5x+8y-1=0$ ಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ) $\left[\dfrac{9}{13}, \; \dfrac{-4}{13}\right]$

(2, 1) ಮತ್ತು ಈ ಬಿಂದುವಿನ ನಡುವಿನ ದೂರ

$$\left[\left(\frac{9}{13}-2\right)^2 + \left(\frac{-4}{13}-1\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

1 Find the point of intersection and the angle between each of the following line pairs :—

(i) $y=2x$ and $x+y=7$

(ii) $x+y=5$ and $5x+8y=0$

(iii) $x-y=1$ and $x-y\sqrt{3}+2=0$

(iv) $x+2y+3=0$ and $2x-2y=0$

(v) $3x+4y+5=0$ and $5x+4y+5=0$.

2 Show that the straight lines $3x+y+4=0$, $3x+4y-15=0$ and $24x-7y-3=0$ form an isosceles triangle.

3 Show that the lines $x+3y-10=0$, $x+3y-20=0$, $3x-4y+5=0$ and $3x-y-5=0$ form a rectangle. Find the lengths of its sides.

4 A line through the point (4, 1) is such that its point of intersection with the line $3x-y=0$ is at a distance $\frac{11\sqrt{2}}{4}$ from this point. Find the slope of the line.

5 Find the equation of the line which passes through the point (4, 3) and makes an angle 45°. with the line $3x+4y+6=0$. Find their point of intersection.

6 Find the equation of the line through (—2, —7) which has a length 3 intercepted on it by the parallel lines $4x+3y=12$ and $4x+3y=13$. How many such lines are there ?

7 Find the distance of the line $3x-y=0$ from the point (4, 1) measured along a line making an angle 135° with the positive direction of x—axis.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 5·8

1 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿ ರೇಖಾದ್ವಯಗಳ ಸಂಗಮಬಿಂದು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

(i) $y=2x$ ಮತ್ತು $x+y=7$.

(ii) $x+y=5$ ಮತ್ತು $5x+8y=0$.

(iii) $x-y=0$ ಮತ್ತು $x-y\sqrt{3+}2=0$.

(iv) $x+2y+3=0$ ಮತ್ತು $2x-2y=0$.

(v) $3x+4y+5=0$ ಮತ್ತು $5x+4y+5=0$.

2 $3x+y+4=0$, $3x+4y-15=0$ ಮತ್ತು $24x-7y-3=0$ ರೇಖೆಗಳು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವೊಂದನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3 $x+3y-10=0$, $x+3y-20=0$, $3x-4y+5=0$ ಮತ್ತು $3x-y-5=0$ ರೇಖೆಗಳು ಆಯವೊಂದನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಅದರ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

4 (4, 1) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $\frac{11\sqrt{2}}{4}$ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $3x-y=0$ ರೇಖೆಯನ್ನು ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ ಈ ರೇಖೆಯ ಓಟವೇನು ?

5 $3x+4y+6=0$ ರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ $45°$ ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡುವ ಮತ್ತು (4,3) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ. ರೇಖೆಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6 $4x+3y=12$ ಮತ್ತು $4x+3y=13$ – ಈ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಚ್ಛಿನ್ನಭಾಗದ ಉದ್ದವನ್ನು 3 ಮಾನಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಹಾಗೂ $(-2,-7)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವೇನು ? ಅಂತಹ ಎಷ್ಟು ರೇಖೆಗಳು ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತವೆ ?

7 x – ಅಕ್ಷದ ಧನ ದಿಕ್ಕಿನೊಂದಿಗೆ $135°$ ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ (4,1) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $3x-y=0$ ರೇಖೆಗೆ ಅಳೆದ ದೂರವೇನು ?

5.9 Lines through the point of Intersection of Two Lines–

Let l and l' be two lines intersecting at P.

Let $ax+by+c=0$....(1)

and $a'x+b'y+c'=0$ .... (2) be their equations.

Let $P\equiv(x', y')$.

Consider the equation

$$(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0, \ldots (3)$$

which is also of first degree in x and y. So it represent a line in the plane. It can be easily seen that this equatio is satisfied for $x=x_1$ and $y=y_1$, irrespective of the value o k. Hence the equation (3) represents a line through th intersection of (1) and (2). For different values of k w obtain different lines through the intersection of the give lines. k will be determined if we are given an additiona condition such as another point on the line or its slope Note that here we can write down the equation of a lin through the intersection of two lines without finding th point of intersection.

Examples

1 Find the equation of the line through the inte section of the lines $3x-5y-1=0$ and $2x-3y-1=0$ an perpendicular to the latter.

Any line through the intersection of the given line has the equation in the form

$$(3x-5y-1)+k(2x-3y-1)=0$$

$$\text{i.e., } (3+2k)x-(5+3k)y-(k+1)=0.$$

Since the required line is perpendicular to $2x-3y-1=($

we have $\dfrac{3+2k}{5+3k}=-\dfrac{3}{2}$ *i.e.* $k=-\dfrac{21}{13}$

$\therefore$ The required line has the equation

$$(3x-5y-1)-\frac{21}{13}(2x-3y-1)=0 \text{ i.e., } 3x+2y-8=$$

l ಮತ್ತು l' ಗಳು Pಯಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಅವುಗಳ ಸಮಿಾಕರಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

$ax + by + c = 0$ .... (1)

ಮತ್ತು $a'x + b'y + c' = 0$ .... (2) ಗಳಾಗಿರಲಿ.

$P \equiv (x', y')$ ಆಗಿರಲಿ.

$$(ax + by + c) + k\,(a'x+b'y+c') = 0 \cdots (3)$$

(3) ಸಮಿಾಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಇದೂ ಸಹ x, y ನಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಪ್ರಮಾಣದ ಸಮಿಾಕರಣವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವುದು. k ಬೆಲೆಯು ಯಾವುದೇ ಆದರೂ ಈ ಸಮೀಕರಣವು $x = x'$ ಮತ್ತು $y = y'$ ಗಳಿಗೆ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (3), (1) ಮತ್ತು (2) ರೇಖೆಗಳು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತದೆ. kಯ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ನಾವು ರೇಖೆಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ವಿವಿಧ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೊಡುವುದು ಅಥವಾ ರೇಖೆಯ ಓಟವನ್ನು ಕೊಡುವುದು— ಇಂತಹ ಮತ್ತೊಂದು ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ kಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದಾಗುತ್ತದೆ. ಸಂಗಮ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯದೇ ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬರೆಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 $3x - 5y - 1 = 0$ ಮತ್ತು $2x - 3y - 1 = 0$ ರೇಖೆಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎರಡನೆಯ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ದತ್ತರೇಖೆಗಳ ಸಂಗಮಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೋಗುವ ಯಾವುದೇ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $(3x - 5y - 1) + k\,(2x - 3y - 1) = 0$.

ಅಂದರೆ $(3+2k)x - (5+3k)\,y - (k+1) = 0$.

ಬೇಕಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯು $2x - 3y - 1 = 0$ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರ ಕಾರಣ $\dfrac{3 + 2k}{5 + 3k} = -\dfrac{3}{2}$ ಅಥವಾ $k = -\dfrac{21}{13}$.

$\therefore$ ಬೇಕಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$(3x - 5y - 1) - \frac{21}{13}(2x - 3y - 1) = 0$$

ಅಥವಾ $3x + 2y - 8 = 0$.

2 Find the co-ordinates of the orthocentre of the triangle formed by the lines given by the following equations.

$$x+2y=0\ ;\quad 4x+3y=5\ ;\quad 3x+y=0.$$

Let A, B, C be the vertices and AD, BE, CF are the altitudes. Let the eqns. of AB, BC, CA be $x+2y=0$; $4x+3y=5$ and $3x+y=0$ respectively.

Then :

Eqn. of the line AD has the form $(x+2y)+k(3x+y)=0.$

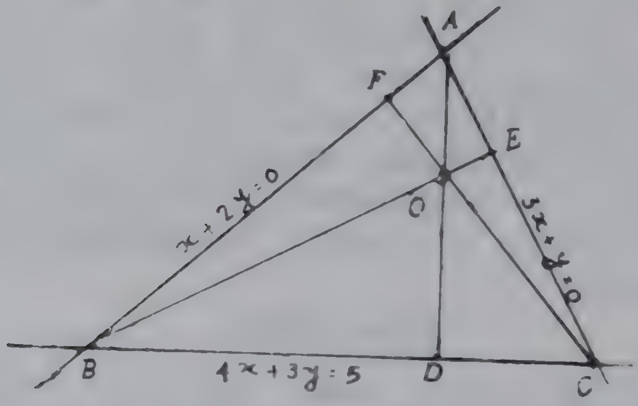


Fig. 5.10

Its Slope is $+\frac{3}{4}$. since $AD \perp BC$

$$\therefore -\frac{1+3k}{2+k} = +\tfrac{3}{4} \text{ or } -4-12k=6+3k$$

$$k=-\tfrac{2}{3}$$

$\therefore$ Equation of AD is $(x+2y)-\dfrac{2}{3}\ (3x+y)=0.$

i.e. or $3x-4y=0$ ....(1)

Similarly eqn. of BE is $x-3y-5=0.$ ....(2)

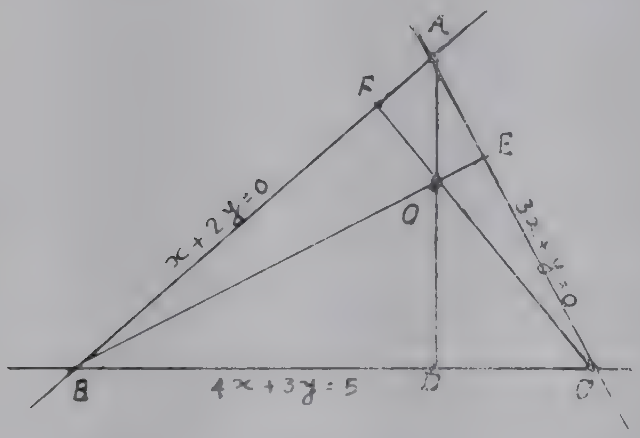
The orthocentre is obtained by solving (1) and (2).

i.e. $x=-4$, $y=-3$.

$\therefore$ $(-4, -3)$ is the orthocentre.

2 $x+2y=0$, $4x+3y=5$, $3x+y=0$ ಸಮೀಕರಣಗಳು ನಿರೂಪಿಸುವ ರೇಖೆಗಳಿಂದೇರ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

A, B, C ಗಳು ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳೂ AD, BE, CF ಗಳು ಅದರ ಲಂಬರೇಖೆಗಳೂ ಆಗಿರಲಿ. AB, BC, CA ಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $x+2y=0$, $4x+3y=5$ ಮತ್ತು $3x+y=0$ ಆಗಿರಲಿ.
ಆಗ AD ಯ ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪವು. $(x+2y)+K(3x+y)=0$.



ಚಿತ್ರ 5.10

$AD \perp BC$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅದರ ಓಟ $= \frac{3}{4}$.

$\therefore \quad -\frac{1+3k}{2+k} = \frac{3}{4}$ ಅಥವಾ $k = -\frac{2}{3}$.

$\therefore \quad AD$ ಯ ಸಮೀಕರಣ : $(x+2y) - \frac{2}{3}(3x+y) = 0$.

ಅಥವಾ $3x-4y = 0$. ....(1)

ಹೀಗೆಯೇ BE ಯ ಸಮೀಕರಣ: $x-3y-5=0$. ....(2)

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ ಲಂಬ ಕೇಂದ್ರವು ಬರುವುದು

$\therefore \quad x=-4, \; y=-3$.

$\therefore \quad (-4, -3)$ ಬಿಂದುವೇ ಲಂಬ ಕೇಂದ್ರ.

1 Using the formula of this section obtain the equations of the lines through the point of intersection of each of the pairs of lines given in Pbm. 1, Exercises 5.8 and (i) Perpendicular to; (ii) Parallel to the line $x+y+8=0$.

2 Find the equation of the line through the intersection of $4x-3y-1=0$ and $2x-5y+3=0$ and

(i) making equal angles with the axes.

(ii) having intercepts on the axes whose sum is k.

(iii) lying at a distance 5 units from the origin.

3 The equations $x+1 = 0$. $4y+5 = 3x$ and $5x+12y=27$ represent the sides of a triangle.

Find the equations of (i) the medians, (ii) the altitudes.

4 Show that the line through the intersection of $ax+by+c=0$ and $dx+ey+f=0$ and the point (x_1, y_1) has the equation

$$\frac{ax+by+c}{ax_1+by_1+c} = \frac{dx+ey+f}{dx_1+ey_1+f}.$$

5 If the lines $ax+by+c=0$ and $a'x+b'y+c'=0$ intersect at p, show that

(i) the equation of the line through the origin and P is $c'(ax+by) = c(a'x+b'y)$.

(ii) the line through P, parallel to $y=mx$ has the equation

$$\frac{ax+by+c}{a+mb} = \frac{a'x+b'y+c'}{a'+mb'}$$

(iii) the line through p, perpendicular to $px+qy+r=0$ has the equation

$$\frac{ax+by+c}{ap+bq} = \frac{a'x+b'y+c'}{a'p+b\,q}$$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 5·9

1 ಅಭ್ಯಾಸ 5·8 ರ 1ನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೇಖಾದ್ವಯಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ, $x+y+8=0$ ರೇಖೆಗೆ (i) ಲಂಬವಾಗಿ; (ii) ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಈ ಪ್ರಕರಣದ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

2 (i) ಅಕ್ಷಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳನ್ನುಂಟು ಮಾಡುವ;

(ii) ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲಿನ ಛಿನ್ನಗಳ ಮೊತ್ತವು k ಆಗಿರುವಂತಹ;

(iii) ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ 5 ಮಾನಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಮತ್ತು $4x-3y-1=0$ ಮತ್ತು $2x-5y+3=0$ ಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವೇನು ?

3 $x+1=0$, $4y+5=3x$ ಮತ್ತು $5x+12y=27$ ಸಮೀಕರಣಗಳು ತ್ರಿಭುಜವೊಂದರ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತವೆ. ಆ ತ್ರಿಭುಜದ (i) ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಗಳ, (ii) ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳೇನು ?

4 (x_1, y_1) ಮತ್ತು $ax+by+c=0$, $dx+ey+f=0$ ಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{ax+by+c}{ax_1+by_1+c} = \frac{dx+ey+f}{dx_1+ey_1+f}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5 $a_1x+by+c=0$ ಮತ್ತು $a'x+b'y+c'=0$ ರೇಖೆಗಳು P ಎಂಬಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ,

(i) ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ P ಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$c'\ (ax+by) = c\,(a'x+b'y);$$

(ii) $y=mx$ ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ P ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $(ax+by+c)/(a+mb)=(a'x+b'y+c')/(a'+mb')$;

(iii) $px+qy+r=0$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ P ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $\dfrac{ax+by+c}{ap+bq} = \dfrac{a'x+b'y+c}{a'p+b'q}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5.10 Bisectors of the Angle between Two Lines –

Let $l \equiv ax+by+c=0$
and $l' \equiv a'x+b'y+c'=0$ be two lines in a plane.

Any line through their intersection is given by
$(ax+by+c)+K(a'x+b'y+c')=0.$

This represents *an* angular bisector of l and l' if an point (x, y) on this line is equidistant from l and l'.

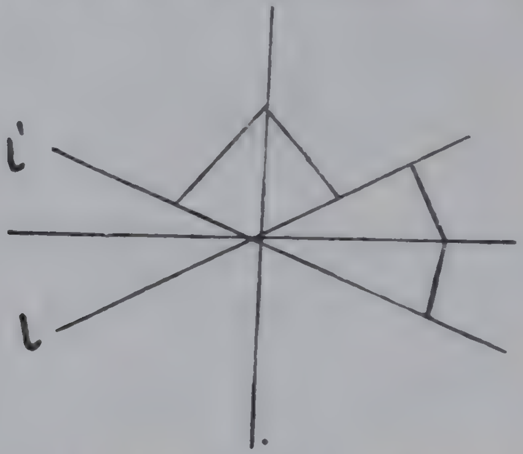


Fig. 5.11

$$\text{i.e.} \quad \left|\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \left|\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}\right|$$

$$\text{i.e.} \quad \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

$$\therefore \quad K = -\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'} = \mp\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a'^2+b'^2}}$$

$\therefore$ Equation of a bisector is

$$(ax+by+c) \mp \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a'^2+b'^2}}\,(a'x+b'y+c') = 0.$$

$$\text{or } \sqrt{a^2+b^2}\,(a'x+b'y+c') \pm \sqrt{a'^2+b'^2}(ax+by+c) =$$

$$l \equiv ax+by+c=0$$

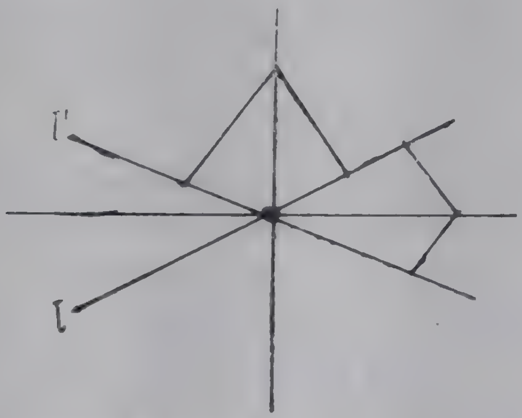
ಮತ್ತು $l' \equiv a'x+b'y+c'=0$

ಗಳು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಇವೆರಡರ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$(ax+by+c)+K\ (a'x+b'y+c')=0$$

ಈ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು (x, y) ಯು l ಮತ್ತು l' ಗಳಿಗೆ ಸಮಾನದೂರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಈ ರೇಖೆಯು l ಮತ್ತು l' ಗಳಿಂದೇರ್ಪಟ ಕೋನದ ಒಂದು ಅರ್ಧಕವಾಗುವುದು.



ಚಿತ್ರ 5.11

ಅಂದರೆ $\left| \dfrac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| = \left| \dfrac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}} \right|$

ಅಥವಾ $\dfrac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm \dfrac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$

ಅಥವಾ $K = -\dfrac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'} = \mp \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a'^2+b'^2}}$

ಎಂದಾಗುವುದು.

$\therefore$ ಕೋನದ ಅರ್ಧಕದ ಸಮೀಕರಣವು

$$(ax+by+c) \mp \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a'^2+b'^2}}\ (a'x+b'y+c')=0.$$

ಅಥವಾ $\sqrt{a^2+b^2}\ (a'x+b'y+c') \pm \sqrt{a'^2+b'^2}\ (ax+by+c)=0.$

This shows that there are two angular bisector corres ponding to the two signs. It can be easily verified tha these two are perpendicular to each other.

Example

Find the equations of the two bisectors of th angles made by the lines

$$5x+12y-52=0 \text{ and } 4x-3y+34=0.$$

From the above result, the bisectors are

$$\sqrt{4^2+3^2}\,(5x+12y-52)\pm\sqrt{5^2+12^2}(4x-3y+34)=0$$

or $77x+21y+182=0$ and $27x-99y+702=0$.

Exercises 5.10

1 Determine the angular bisectors of each of th pairs of lines given in Pbm. 1, Ex. 5.8.

2 Show that the line through the origin and th point of intersection of the lines $x-y-4=0$ an $7x+y+20=0$ is a bisector of the angle between them.

3 What are the equations of the lines which pas through the foot of the normal from the point (3, 2) to th line $3x-4y+3=0$ and bisecting the angle between th normal and the line.

4 What are the lines which bisect the angle betwee $x+y\sqrt{3}=6+2\sqrt{3}$ and $x-y\sqrt{3}=6-2\sqrt{3}$? Find the rad of the circles which have their centres on the axes an touch the given lines.

5.11 Concurrence and Collinearity—

Let l_1, l_2, l_3 be three lines in a plane. These line are said to be *concurrent* if all of them have a point i common. *i.e.* if one line passes through the point of inter section of the other two. The common point of inter section is called the *point of concurrence.*

ಇದು ಎರಡು ಚಿಹ್ನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟಂತೆ, ಎರಡು ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳಿರುವುದೆಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಇವೆರಡೂ ಅರ್ಧಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ

$5x+12y-52=0$ ಮತ್ತು $4x-3y+34=0$ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನಗಳ ಅರ್ಧಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶದಿಂದ, ಅರ್ಧಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\sqrt{4^2+3^2}\,(5x+12y-52) \pm \sqrt{5^2+12^2}\,(4x-3y+34)=0$$

ಅಥವಾ $77x+21y+182=0$ ಮತ್ತು $27x-99y+702=0$.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 5.10

1. ಅಭ್ಯಾಸ 5.8 ರ 1 ನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿ ರೇಖಾದ್ವಯದ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳ ಅರ್ಧಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

2. $x-y-4=0$ ಮತ್ತು $7x+y+20=0$ ರೇಖೆಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದು ಹಾಗೂ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖೆಯು, ಅವುಗಳಿಂದೇರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನದ ಅರ್ಧಕವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. (3, 2) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $3x-4y+3=0$ ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಪಾದದ ಮೂಲಕ, ದತ್ತರೇಖೆ ಹಾಗೂ ಲಂಬದ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸಿಕೊಂಡು ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವೇನು ?

4. $x+y\sqrt{3}=6+2\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $x-y\sqrt{3}=6-2\sqrt{3}$ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು ಯಾವುವು ? ಈ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸ ರ್ಶಿಸುವಂತೆ ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನುಳ ವ ತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ ಗಳೇನು ?

5.11 ಏಕ ಬಿಂದು ಸಂಪಾತ ಮತ್ತು ಏಕ ರೇಖಾಗತ

l_1, l_2, l_3ಗಳು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ರೇಖೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಇವುಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ; ಅಂದರೆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಮೂರನೆಯ ರೇಖೆಯು ಸಾಗುವಂತಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಏಕ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಪಾತ ಹೊಂದಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅವುಗಳೆಲ್ಲವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಗಮಬಿಂದುವನ್ನು ಸಂಪಾತ ಬಿಂದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

Let the equations of l_1, l_2, l_3 be

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \ldots. \quad (1),$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad \ldots. \quad (2),$$

$$a_3x+b_3y+c_3=0. \quad \ldots \quad (3).$$

The point of intersection of l_1 and l_2 is

$$\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)$$

The lines are concurrent if l_3 passes through this point, *i.e.* if the co-ordinates of this point satisfy the eqn. (3).

The condition for this is

$$a_3\left[\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right]+b_3\left[\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right]+c_3=0.$$

or $a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$

This condition can be conviniently written in the form

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

The converse can be proved by reversing the argument.

Thus the lines $a_1x+b_1y+c_1=0$; $a_2x+b_2y+c_2=0$ and $a_3x+b_3y+c_3=0$ are concurrent if and only if

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

The converse of this can also be proved easily.

Let P, Q, R be three points in a plane. These points are said to be *collinear* if all of them lie on the same straight line, *i.e.* the line through two of the points passes through the third point also. The line on which these three points lie is called the *line of collinearity.*

l_1, l_2, l_3ಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

$$a_1x+b_1y+c_1=o \quad (1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=o \quad (2)$$

$$a_3x+b_3y+c_3=o \quad (3)$$ ಆಗಿರಲಿ.

l_1 ಮತ್ತು l_2ಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದು

$$\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)$$

l_3 ರೇಖೆಯು ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹೋದರೆ, ಅಂದರೆ ಈ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (3)ನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಿದ್ಧಿಸಿದರೆ ರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುವ್ಯಾಪಿ ಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಇದಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ನಿಬಂಧನೆ

$$a_3\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right) + b_3\left(\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right) + c_3=o$$

ಅಥವಾ $a_3\,(b_1c_2-b_2c_1) + b_3\,(c_1a_2-c_2a_1) + c_3\,(a_1b_2-a_2b_1)=o$

ಈ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = o$

ಎಂದು ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿ ಬರೆಯ ಬಹುದು.

ಇದರ ವಿಲೋಮವನ್ನು ವ್ಯತಿರಕ್ತವಾದದ ಮೂಲಕ ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾಧಿಸ ಬಹುದು.

ಹೀಗೆ, $a_1x+b_1y+c=o$; $a_2x+b_2y+c_2=o$; $a_3x+b_3y+c_3=o$

ರೇಖೆಗಳು $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = o$

ಆದಾಗಮಾತ್ರ ಏಕಬಿಂದುವ್ಯಾಪಿ ಗಳಾವುವು.

ಇದರ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

P, Q, R ಗಳು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಎಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದ್ದರೆ; ಅಂದರೆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ರೇಖೆಯು ಮೂರನೆಯ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವೂ ಹಾದು ಹೋದರೆ, ಆ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿರುವುವು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನು ಹೊಂದಿರುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ರೇಖಾಗತ ರೇಖೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

Let the co-ordinates of P, Q, R be (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) respectively.

The line through P and Q has the equation

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

The lines are collinear if R also lies on this line ; *i.e.* (x_3, y_3) satisfy this equation.

The condition for this is

$$\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

or $x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0.$

This condition can be conviniently written as

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

The converse of this is also true. This can be proved easily by reversing the argument.

Thus the points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) are collincar if and only if

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Note :—If three lines are concurrent, one line passes through the intersection of the other two and so the equations of the lines should be of the form

$$L_1=0, \ L_2=0, \ L_1+K\,L_2=0$$

where K is a constant. This is equivalent to the condition derived above.

Exercises 5.11

1 Show that the following sets of lines are concurrent

(i) $x-y+3=0$, $2x-7y+1=0$, $x-6y-2=0$

(ii) $y=2x+3$, $3x+2y+22=0$, $5x-y+15=0$

(iii) $2x=3y+9$, $3x+y=8$, $5x=2y+17$.

P, Q, R ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ಗಳಾಗಿರಲಿ. P, Q ಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

R ಬಿಂದುವು ಈ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದ್ದರೆ ; ಅಂದರೆ R ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಿದ್ಧಿಸಿದರೆ ಬಿಂದುಗಳು ರೇಖಾಗತವಾಗುತ್ತವೆ. $\therefore$ ಇದಕ್ಕಿರ ಬೇಕಾದ ನಿಬಂಧನೆ

$$\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

ಅಥವಾ $x_1(y_2-y_1)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$

ಇದನ್ನು $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

ಎಂದು ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿ ಬರೆಯ ಬಹುದು.

ಇದರ ವಿಲೋಮವನ್ನು ವ್ಯತಿರಿಕ್ತವಾದದಿಂದ ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

> ಹೀಗೆ (x_1, y_1), (x_2, y_2), $x_3, y_3)$ ಗಳು
>
> $$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
>
> ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗುವುವು.

ಸೂಚನೆ : ಮೂರು ರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದು ಸಂಪಾತವಾದಾಗ ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಉಳಿದೆರಡು ರೇಖೆಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗಬೇಕಾದುದರಿಂದ, ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ರೂಪಗಳು $L_1=0$; $L_2=0$; $L_1+KL_2=0$ ಆಗಿರಬೇಕಾ ಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದು ಮೇಲೆ ಪಡೆದ ನಿಬಂಧನೆಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 5.11

1 ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೇಖೆಗಳ ಗಣಗಳು ಏಕಬಿಂದುವ್ಯಾಪಿಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

(i) $x - y + 3 = 0$, $2x - 7y + 1 = 0$, $x - 6y - 2 = 0$.

(ii) $y = 2x + 3$, $3x + 2y + 22 = 0$, $5x - y + 15 = 0$.

(iii) $2x = 3y + 9$, $3x + y = 8$, $5x = 2y + 17$.

2 Show that the following sets of points are collinear

(i) $(1, -2)$, $(2, 0)$, $(0, -4)$

(ii) $(-1, 1)$, $(3, -2)$, $(-5, 4)$

(iii) $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$.

3 Verify that the perpendiculars drawn from the vertices $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$, $C(0, c)$ of a triangle to the opposite sides are concurrent. Find the point of concurrence.

4 Show that the feet of the normals from the origin to the lines $x+y=4$, $x+5y=26$, $15x-27y=424$ are collinear.

5 Show that the lines $lx+my+n=0$; $mx+ny=l$; $nx+ly+m=0$ are concurrent if $l+m+n=0$.

6 If the lines $p_1x+q_1 y=1$, $p_2x+q_2y=1$, $p_3x+q_3y=1$ are concurrent, show that the points (p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3) are collinear.

5·12 Area of a Triangle—

Let $P(x_1, y_1)$; $Q(x_2, y_2)$ and $R(x_3, y_3)$ be any three points in a plane. If PN is the perpendicular to QR from P, we have the expression for the areaof the triangle PQR as $\frac{1}{2}$ PN, QR.

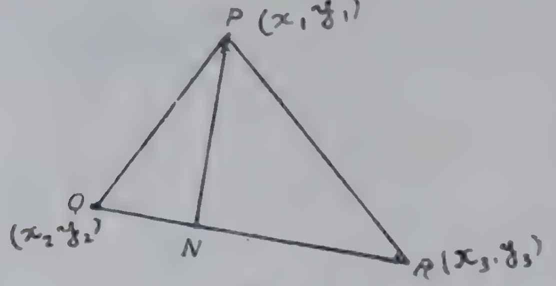


Fig. 5.12

QR has the equation

$$\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} = \frac{y-y_2}{x-x_2}$$

2 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದು ಗಣಗಳು ಏಕ ರೇಖಾಗತವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

(i) $(1,-2)$, $(2,0)$, $(0,-4)$

(ii) $(-1,1)$, $(3,-2)$, $(-5,4)$

(iii) $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$.

3 ABC ತ್ರಿಭುಜದ $A\ (a,0), B\ (-a,\ 0), C\ (0,c)$ ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ಏಕಬಿಂದುವ್ಯಾಪಿಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ಇವುಗಳ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದುವಾವುದು?

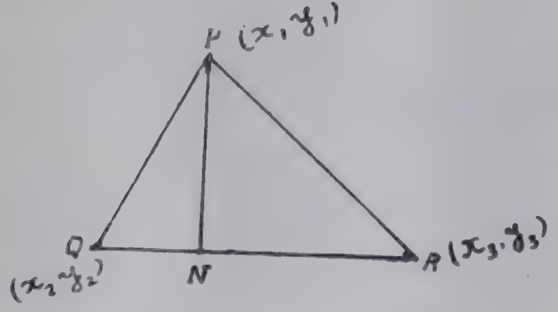
4 ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x+y=4,\ x+5y=26,\ 15x-27y=424$ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳ ಪಾದಗಳು ಏಕ ರೇಖಾಗತಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

5 $l+m+n=0$ ಆದಾಗ $lx+my+n=0;\ mx+ny+l=0;\ nx+ly+m=0$ ರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದು ವ್ಯಾಪಿಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

6 $p_1x+q_1y=1,\ p_2x+q_2y=1$ ರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದು ವ್ಯಾಪಿಗಳಾದರೆ $(p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3)$ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕ ರೇಖಾಗತಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

5·12 ತ್ರಿಭುಜವೊಂದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

$P\ (x_1, y_1)$, $Q\ (x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $R\ (x_3, y_3)$ ಗಳು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. P ನಿಂದ QR ಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು PN ಆದರೆ, PQR ತ್ರಿಭುಜದ ಸಲೆಯು $\frac{1}{2}\ PN.QR$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 5.12

QR ನ ಸಮೀಕರಣವು $\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2} = \dfrac{y-y_2}{x-x_2}$

or $\quad (y_3-y_2)x+(x_2-x_3)y+(x_3y_2-x_2y_3)=0.$

Distance of P from this line is

$$PN=\left|\frac{(y_3-y_2)x_1+(x_2-x_3)y_1+(x_3y_2-x_2y_3)}{\sqrt{(y_3-y_2)^2+(x_2-x_3)^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{-x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)}{\sqrt{(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2}}\right|$$

Also $QR=\sqrt{(y_3-y_2)^2+(x_2-x_3)^2}$.

$\therefore\quad \triangle PQR=\frac{1}{2}\,PN,\,QR=$

$$\frac{1}{2}\,[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

This can be conveniently written as

$$\triangle PQR=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Cor :—Three points are collinear if the area of the triangle formed by them is zero. $\therefore$ (x_1, y_1), (x_2, y_2) and (x_4, y_3) are collinear if

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Exercises 5.12

1 Find the area of the triangle formed by the following sets of points.

(i) (4, 0), (0, 1) and (2, 5)

(ii) (5, 6), (−1, 0) and (6, 3)

(iii) (0, 1), (5, 6) and (8, 5).

2 Find the area of the triangle formed by the following sets of lines.

(i) $x+y+1=0,\ x-2y+2=0,\ 2x+3y-4=0$

(ii) $x=y,\ x+y-1=0,\ x-2y-3=0.$

ಅಥವಾ $(y_3-y_2)\,x+(x_2-x_3)\,y+(x_3\,y_2-x_2\,y_3)=0$

ಈ ರೇಖೆಯಿಂದ P ಗಿರುವ ದೂರ

$$PN=\left|\frac{(y_3-y_2)\,x_1+(x_2-x_3)\,y_1+(x_3\,y_2-x_2\,y_3)}{\sqrt{(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{-x_1\,(y_2-y_3)+x_2\,(y_3-y_1)+x_3\,(y_1-y_2)}{\sqrt{(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2}}\right|$$

ಅಲ್ಲದೆ, $QR=\sqrt{(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2}.$

$\therefore\quad \triangle\, PQR=\frac{1}{2}PN.QR=$

$\frac{1}{2}[x_1\,(y_2-y_3)+x_2\,(y_3-y_1)+x_3\,((y_1-y_2)]$

ಇದನ್ನು ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿ

$$\triangle\, PQR=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉಪಪ್ರಮೇಯ: ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಿಂದೇರ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಶೂನ್ಯವಾದಾಗ ಅವು ಮೂರೂ ಒಂದೇ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರಲು ಬೇಕಾದ ನಿಬಂಧನೆ

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 5.12

1 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಣಗಳಿಂದ ರಚಿತವಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) (4, 0), (0, 1) ಮತ್ತು (2, 5)

(ii) (5, 6), (−1, 0) ಮತ್ತು (6, 3)

(iii) (0, 1), (5, 6) ಮತ್ತು (8, 5).

2 ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾಗಣಗಳಿಂದ ರಚಿತವಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x+y+1=0;\ x-2y+2=0,\ 2x+3y-4=0$

(ii) $x=y,\ \ x+y-1=0,\ \ x-2y-3=0.$

(iii) $y = m_1 x + \dfrac{a}{m_1}$, $y = m_2 x + \dfrac{a}{m_2}$, $y = m_3 x + \dfrac{a}{m_3}$.

3 Show that the area of the triangle formed by the lines whose equations are $y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$, and $x=0$ is

$$\frac{1}{2}\,\frac{(c_1-c_2)^2}{(m_2-m_1)}$$

4 Prove analytically that the area of a triangle is 4 times the area of the triangle formed by its middle points.

5 If (1, 1), (7, −3), (12, 2) and (7, 21) are the co-ordinates of the vertices of a quadrilateral, prove that its area is 132 sq. units.

(iii) $y = m_1 x + \frac{a}{m_1}$; $y = m_2 x + \frac{a}{m_2}$,

$$y = m_3 x + \frac{a}{m_3}$$

3 $y = m_1 x + c_1$, $y = m_2 x + c_2$, ಮತ್ತು $x = 0$ ಗಳು ನಿರೂಪಿಸುವ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ರಚಿತವಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲವು $\frac{1}{2}\frac{(c_1 - c_2)^2}{m_2 - m_1}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4 ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಆ ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿಂದ ರಚಿತವಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲದ 4 ರಷ್ಟಿರುವುದು ಎಂದು ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತದ ರೀತಿಯಿಂದ ಸಾಧಿಸಿ.

5 (1, 1), (7, —3), (12, 2) ಮತ್ತು, (7, 21) ಬಿಂದುಗಳು ಚತುರ್ಭುಜವೊಂದರ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿವೆ. ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ 132 ಚದರಮಾನಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

CHAPTER 6

The Circle

In Sec. 4.4 while we were discussing the concept of t locus, we obtained the equation of a circle by consideri it as the locus of a point which always lies at a consta distance from a given point. In this chapter we shall u it to study a few of the important concepts associat with the circle.

6.1 Equation of a Circle—

(*a*) *Standard form*—

Let us consider a circle whose radius is r and wh centre is C. If we choose the axes such that the ori coincides with C, we have $C\equiv(0, 0)$. With reference to th axes, let any point P of the circle have coordinates (x, y).

Then the condition satisfied by P is $CP^2=r^2$

i.e., $x^2+y^2=r^2$.

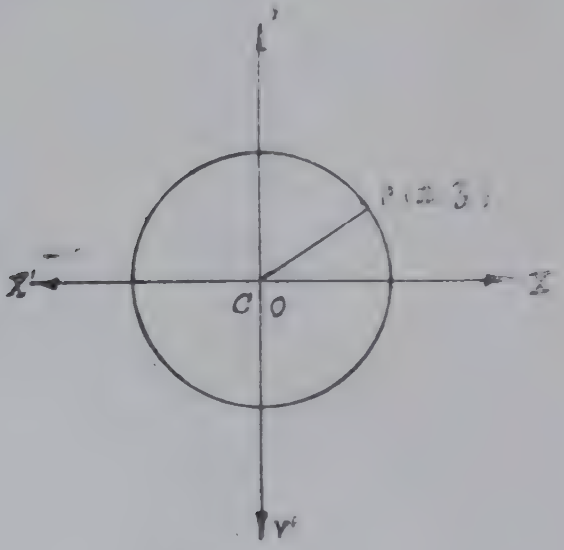


Fig. 6.1

This condition holds good for all points of the cir and does not hold good for any point not on the circ

Hence

$x^2+y^2=r^2$ is the equation of a circle whose centre is tl origin and whose radius is r.

ಅಧ್ಯಾಯ 6

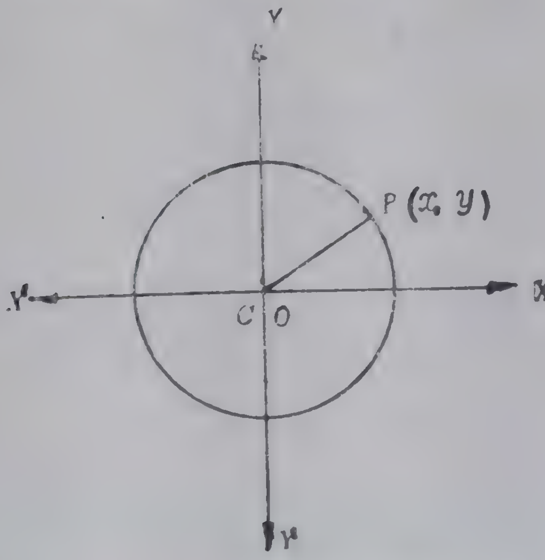
ವೃತ್ತ

ಪ್ರಕರಣ 4.4 ರಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಪಥದ ಭಾವನೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸುವಾಗ, ದತ್ತ ಬಿಂದುವೊಂದರಿಂದ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥವು ಒಂದು ವೃತ್ತವಾಗಿರುವುದೆಂಬುದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆದೆವು. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಪ್ರಮುಖ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಲು ಅದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ.

6.1 ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ

(*a*) ಸುಲಭರೂಪ.

C ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯೂ rನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಯೂ ಉಳ್ಳ ವೃತ್ತವೊಂದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಮೂಲಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ Cಯಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅದರಂತೆ $C \equiv (0, 0)$ ಆಗುವುದು. ಈ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ವೃತ್ತದಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದು $P \equiv (x, y)$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ Pಯು ಸಿದ್ಧಿಸಬೇಕಾದ ನಿಬಂಧನೆ $CP^2 = r^2$. ಅದರಂತೆ $x^2 + y^2 = r^2$ ಆಗುವುದು.



ಚಿತ್ರ 6.1

ಈ ನಿಬಂಧನೆಯು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳಿಗೂ ಹೊಂದುವಂತೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿಲ್ಲದ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿಗೂ ಸರಿಹೊಂದದಂತೆ ಇರುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ

> $x^2 + y^2 = r^2$ ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯೂ rನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಯೂ ಉಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ.

(b) *General form*—

Let us condsier a circle whose radius is r and whose centre is C. Let the co-ordinates of C be (h, k), and the co-ordinates of any point P of the circle be (x, y).

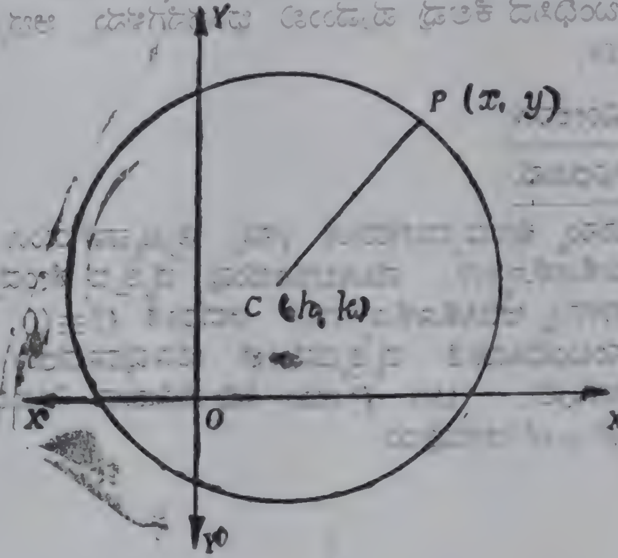


Fig. 6.2

The condition satisfied by P is $PC^2 = r^2$

i.e. $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.

This condition holds good for all points of the circle and does not hold good for any point which does not belong to the circle.

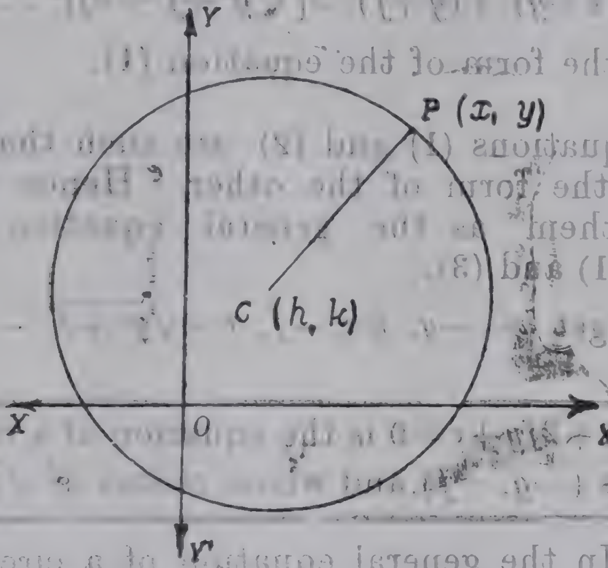
Hence,

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ is the equation of a circle whose radius is r and whose centre lies at (h, k).

Note:—The circle is real when $r>0$ and is imaginary when $r<0$. If $r=0$, the circle reduces to a point and we call it the *point circle*.

(b) ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೂಪ.

C ಯನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯೂ rನ್ನು ತ್ರಿಜ ವಾಗಿಯೂ ಉಳ್ಳ ವೃತ್ತವೊಂದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಸೂಕ್ತ ನಿರ್ದೇಶನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ Cಯು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (h, k) ಆಗಿಯೂ, ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವೊಂದು ಬಿಂದು Pಯು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x, y)ಯೂ ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 6.2

ಆಗ Pಯು ಸಿದ್ಧಿಸುವ ನಿಬಂಧನೆ $PC^2=r^2$.

ಅದರಂತೆ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ಆಗುವುದು.

ಈ ನಿಬಂಧನೆಯು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳಿಗೂ ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ, ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿಲ್ಲದ ಯಾವಬಿಂದುವಿಗೂ ಸರಿಹೊಂದದಂತೆ ಇರುವುದು.

ಅದ್ದರಿಂದ

> $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ಎಂಬುದು (h,k) ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯೂ, rನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಯೂ ಉಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ.

ಸೂಚನೆ: $r>0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ವೃತ್ತವು ವಾಸ್ತವವಾಗಿಯೂ, $r<0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ವೃತ್ತವು ಊಹ್ಯವಾಗಿಯೂ ಇರುವುದು. $r=0$ ಆದಾಗ ವೃತ್ತವು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಮಾರ್ಪಾಡಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಬಿಂದುವೃತ್ತ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

Now, Equation $(x-h)^2+(y-k)^2=x^2$ . . . (1)

can be written as $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$ which is of the form $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ . . . (2)

If we start with equation 2 we can write it as

$$x^2+2gx+g^2+y^2+2fy+f^2=g^2+f^2-c$$

$$\text{or } (x+g)^2+(y+f)^2=[\sqrt{g^2+f^2-c}]^2 \quad . . . (3)$$

which is of the form of the equation (1).

Thus equations (1) and (2) are such that one can be reduced to the form of the other. Hence we can take either of them as the general equation of a circle. Comparing (1) and (3),

we get $h=-g,\ k=-f,\ r=\sqrt{g^2+f^2-c}$.

Hence

> $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ is the equation of a circle whose centre is $(-g, -f)$ and whose radius is $\sqrt{g^2-f^2-c}$

Note.—In the general equation of a circle, we notice that it is a second degree equation in x and y in which

(i) the co-efficients of x^2 and y^2 are equal, and

(ii) the term containing xy is absent.

Conversely any equation of the second degree satisfying conditions (i) and (ii) always represents a circle.

Examples

1 *Find the centre and radius of the circle given by the equation*—

$$3x^2+3y^2+4x-6y+3=0$$

The given equation is equivalent to

$$x^2+y^2+\ ^4\ x-2y+1=0.$$

ಈಗ, $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ . . . (1)
ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$
ಎಂಬುದಾಗಿ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ . . . (2)
ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಸಮೀಕರಣ (2) ನ್ನು

$$x^2+2gx+g^2+y^2+2fy+f^2=g^2+f^2-c$$

ಅಥವಾ $(x+g)^2+(y+f)^2=[\sqrt{g^2+f^2-c}]^2$ . . . . (3)
ಎಂಬುದಾಗಿ ಸಮೀಕರಣ (1) ರ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಹೀಗೆ ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ಗಳು ಒಂದರಿಂದ ಮತ್ತೊಂದನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ಇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಇವೆರಡರಲ್ಲಿ ಯಾವೊಂದನ್ನು ಬೇಕಾದರೂ ವೃತ್ತದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

(1) ಮತ್ತು (3)ನೇ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದರೆ, $h=-g$, $k=-f$, $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದುದರಿಂದ

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ಎಂಬುದು $(-g, -f)$ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯೂ, $\sqrt{g^2+f^2-c}$ ನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಯೂ ಉಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ

ಸೂಚನೆ :—ವೃತ್ತದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ, ಅದು

(i) x^2 ಮತ್ತು y^2 ಗಳ ಗುಣಕಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವಂತಹ ಮತ್ತು

(ii) xy ಪದವು ಲೋಪವಾಗಿರುವ

ದ್ವಿಪ್ರಮಾಣದ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ವಿಲೋಮವಾಗಿ, (i) ಮತ್ತು (ii) ನೆಯ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಈಡೇರಿಸುವ ದ್ವಿಪ್ರಮಾಣದ ಸಮೀಕರಣವು ವೃತ್ತವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವುದು ಎಂದೂ ಗಮನಿಸಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 $3x^2+3y^2+4x-6y+3=0$ ಸಮೀಕರಣವು ನಿರೂಪಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಹಾಗೂ ತ್ರಿಜವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$x^2+y^2+\frac{4}{3}x-2y+1=0$ ಎಂದು ಬರೆದು

Comparing this with $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$,

we see that $g=\frac{2}{3}$; $f=-1$; $c=1$.

$\therefore$ Centre is $(-\frac{2}{3}, 1)$ and radius is $\sqrt{\frac{4}{9}+1-1}=\frac{2}{3}$ units.

2 *Find the equation of a circle which passes throug the origin and makes intercepts of lengths a and b on th axes of x and y respectively.*

It is given that $(0, 0)$, $(a, 0)$ and $(0, b)$ are points o the given circle.

Let its equation be $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.

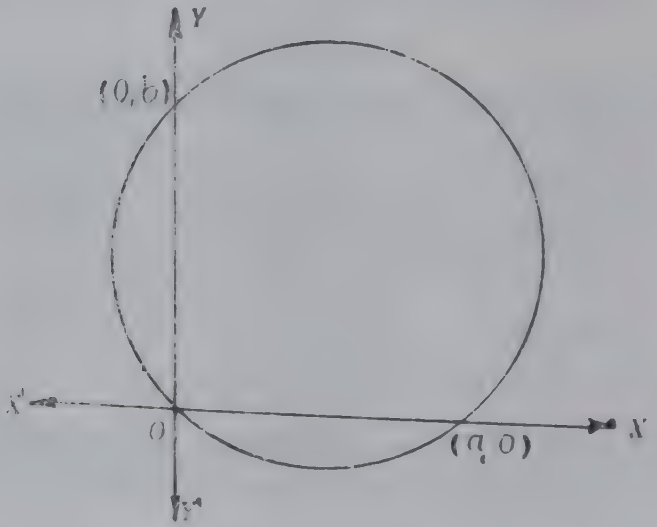


Fig. 6.3

Since the circle passes through $(0, 0)$,

$$0+0+2g.0+2f.0+c=0.$$

Similarly $a^2+0+2g.a+2f.\,0+c=0.$

$$0+b^2+2g.0+2f.b+c=0.$$

These give $c=0$; $g=-\frac{a}{2}$, $f=-\frac{b}{2}$.

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ಸಮೀಕರಣದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದರೆ,

$$g=\tfrac{2}{3},\ f=-1;\ c=1.$$

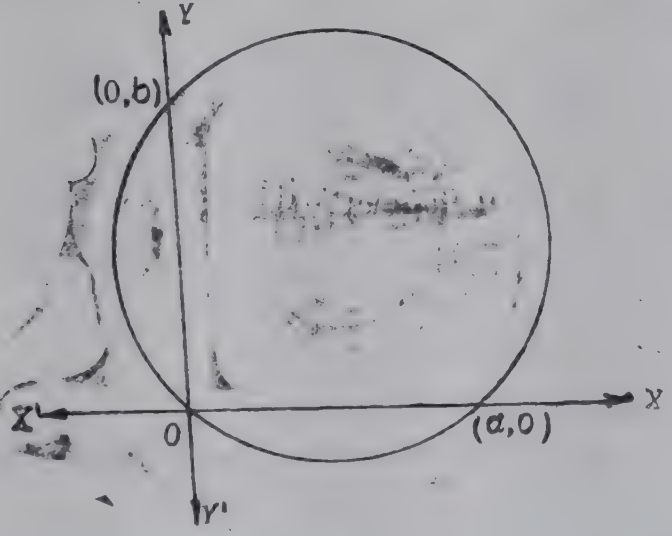
$\therefore$ ಕೇಂದ್ರ $\equiv \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$ ಮತ್ತು

ತ್ರಿಜ್ಯ $\equiv \sqrt{\frac{4}{9}+1-1}=\frac{2}{3}.$

2 ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಹಾಗೂ x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ a ಮತ್ತು b ಉದ್ದಗಳ ವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವೇನು ?

$(0, 0)$, $(a, 0)$ ಮತ್ತು $(0, b)$ ಬಿಂದುಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿವೆ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 6.3

ವೃತ್ತವು (0, 0) ಮೂಲಕ ಹೋಗುವುದರಿಂದ,

$$0+0+2g.\ 0+2f.\ 0+c=0.$$

ಹೀಗೆಯೇ $a^2+0+2g.\ a+2f.\ 0+c=0$

$$0+b^2+2g.\ 0+2f.\ b+c=0.$$

ಇವುಗಳಿಂದ ; $c=0,\ g=-\frac{a}{2},\ f=-\frac{b}{2}$

$\therefore$ The given circle has the equation

$$x^2+y^2-bx-ay=0.$$

The centre is $\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

Radius is $\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$

3 *Find the equation of the circle passing through the origin, having the radius 5 and the centre lying on*

$$3x-4y+15=0.$$

Let the equation of the circle be $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ so that we have $r=5$, $3h-4k+15=0$ and $h^2+k^2=r^2=25$

Solving : $h=-5$ or $\frac{7}{5}$

$k=0$ or $\frac{24}{5}$

$\therefore$ There are two circles with centres at $(-5, 0)$ and $\left(\frac{7}{5}, \frac{24}{5}\right)$. Their equations are $(x+5)^2+y^2=25$ and $\left(x-\frac{7}{5}\right)^2+\left(y-\frac{24}{5}\right)^2=25.$

4 *Find the equation of the circle given that* (x_1, y_1) *and* (x_2, y_2) *are the end points of a diameter.*

Since A (x_1, y_1) and B (x_2, y_2) are the end points of the diameter, they subtend a right angle at any point P $x, y)$ on the circle. $\therefore$ The slope of AP is the negative reciprocal of that of BP.

$$\text{i.e. } \frac{y_2-y}{x_2-x} = -\frac{x_1-x}{y_1-y}$$

$$\text{i.e. } (y_2-y)(y_1-y) - (x-x_1)(x_2-x)=0.$$

$$\text{or } (x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2)=0.$$

∴ ದತ್ತ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ

$$x^2+y^2-bx-ay=0.$$

ಅದರ ಕೇಂದ್ರ $\left(\frac{a}{2}, \frac{}{2}\right)$ ಮತ್ತು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯ $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

3 ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಹಾಗೂ $3x-4y+15=0$ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ, 5 ಮಾನಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯದ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವೇನು ?

ವೃತ ದ ಸಮೀಕರಣ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, $r=5$, $3h-4k+15=0$ ಮತ್ತು $h^2+k^2=r^2=25$.

ಬಿಡಿಸಿದರೆ $h=-5$, ಅಥವಾ $\frac{7}{5}$

$k=0$ ಅಥವಾ $\frac{24}{5}$

∴ $(-5, 0)$ ಮತ್ತು $\left(\frac{7}{5}, \frac{24}{5}\right)$ ಗಳಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರಗಳಾಗಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತ

ಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$(x+5)^2+y^2=25$$

ಮತ್ತು $\left(x-\frac{7}{5}\right)^2+\left(y-\frac{24}{5}\right)^2=25$

4 (x_1, y_1) ಮತು (x_2, y_2) ಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಸವೊಂದರ ಕೊನೆಯ ಬಿಂದು ಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

A (x_1, y_1) ಮತ್ತು B (x_2, y_2) ಗಳು ವ್ಯಾಸದ ಕೊನೆಯ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅವು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು P (x, y) ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲಂಬ ಕೋನವನ್ನೇರ್ಪಡಿಸುವುವು. ∴ APಯ ಓಟವು BPಯ ಓಟದ ಋಣ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ (negative reciprocal) ವಾಗಿರುವುದು.

ಅಂದರೆ $\frac{y_2-y}{x_2-x}=-\frac{x_1-x}{y_1-y}$

ಅಥವಾ $(y_2-y_1)(y_1-y)-(x-x_1)(x_2-x)=0$.

ಅಥವಾ $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

This holds good for each and every point P on the circl and does not hold good for any point not on the circle. Hence it is the equation of the required circle.

We can also work the problem by writing down th co-ordinates of the centre *viz.* the mid point of the join o the given points, and the radius which is half the distanc between the given points. But the above is an elegan and useful form.

5 *If AB is a chord of a circle, show that the perpendicular bisector of AB passes through the centre of the circle.*

Let us choose the axes such that the origin lies at th centre of the circle. Then the eqn. of the circle may b written as $x^2+y^2=r^2$.

Let $A\equiv(x_1,\ y_1)$; $B\equiv(x_2,\ y_2)$. If C and D ar respectively the centre of the circle and the mid point o AB, they are given by (0, 0) and $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

Slope of AB is $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ so that the slope of th perpendicular bisector of AB is $-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$

Slope of CD is $\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$.

The bisector passes through C if CD and the bisecto have the same slope. This is possible if

$$\frac{y_2+y_1}{x_1+x_2}=-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$$

i.e., if $y_2^2-y_1^2=x_1^2-x_2^2$

i.e., if $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$ which is true since A and B lie on the circle.

ಇದು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವೊಂದು ಬಿಂದು Pಗೂ ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ ಹಾಗೂ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿಲ್ಲದ ಯಾವಬಿಂದುವಿಗೂ ಸರಿಹೊಂದದಂತೆ ಇರುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಬೇಕಾದ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ.

ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದ ಅಂದರೆ ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಅಂದರೆ ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನ ನಡುವಿನ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದೂ ಸಹ ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನವು ಚಿಕ್ಕದಾದ ಹಾಗೂ ಚೊಕ್ಕವಾದ ವಿಧಾನ.

5 AB ಎನ್ನುವುದು ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಆದರೆ ABಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕವು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಮೂಲ ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $x^2+y^2=r^2$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$A\equiv(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B\equiv(x_2, y_2)$ ಆಗಿರಲಿ. C ಮತ್ತು Dಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ABಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆದಾಗ

$C\equiv(0, 0)$ ಮತ್ತು

$$D\equiv\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

ABಯ ಓಟ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ಆಗಿರುವುದರ ಕಾರಣ ಅದರ ಲಂಬಾರ್ಧಕದ ಓಟ

$$-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$$

CDಯ ಓಟ $\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$

ABಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕವು Cಯ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗಬೇಕಾದರೆ CDಯ ಮತ್ತು ಅರ್ಧಕದ ಓಟಗಳು ಸಮನಾಗಬೇಕು.

$$\text{ಇದು } \frac{y_2+y_1}{x_1+x_2}=-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$$

ಅಂದರೆ $y_2^2-y_1^2=x_1^2-x_2^2$ ಅಥವಾ $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರಸಾಧ್ಯ. A ಮತ್ತು B ಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ ಇದು ಸತ್ಯ.

Exercises 6.1

1 Find the equations of the circles whose centres and radii are respectively

(i) (1, 2), 3 (iii) (—1, —8), 5

(ii) (1, 0), 1 (iv) $(\frac{3}{2}, -2\frac{1}{2})$, 1.

2 Find the centre and radius of each of the following circles :—

(i) $3x^2+3y^2+8x+4y+1=0$,

(ii) $x^2+y^2-25=0$,

(iii) $x^2+y^2+x+y-2=0$.

3 A circle passes through the three points (5, —8), (—2, 9), (2, 1). Find the co-ordinates of its centre and the radius.

4 Find the equation of the circle circumscribing the triangle formed by the lines $x+y=6$, $2x+y=4$ and $x+2y=5$.

5 Find the equation of the diameter of the circle $x^2+y^2+6x-2y=6$, which when produced passes through (1, 2).

6 Find the circle which passes through (—2, 0) and (4, 0) and whose radius is 5.

7 Find the circle which passes through (3, 0) and (5, 0) and has its centre on $2x+y=1$.

8 Show that the points (—3, 11), (5, 9), (8, 0) and (6, 8) lie on a circle. Find the radius and centre of the circle.

6.2 Equation of the Tangent to a Circle—

Let $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ be the equation of a circle. Then its centre C is $(-g, -f)$ and radius is $\sqrt{g^2+f^2-c}$.

Let P (x_1, y_1) be a point on the circle. Then the slope of CP is $\dfrac{y_1+f}{x_1+g}$.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 6.1

1 (i) (1, 2), 3, (iii) (—1, —8), 5

(ii) (1, 0), 1, (iv) ($\frac{3}{2}$, $-2\frac{1}{2}$), 1

ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೇಂದ್ರ ಹಾಗೂ ತ್ರಿಜ ಗಳಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

2 ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿ ಸಮೀಕರಣವೂ ನಿರೂಪಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

(i) $3x^2+3y^2+8x+4y+1=0$

(ii) $x^2+y^2-25=0.$

(iii) $x^2+y^2+x+y-2=0.$

3 ಒಂದು ವೃತ್ತವು (5, —8), (—2, 9), (2, 1) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅದರ ಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಹಾಗೂ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

4 $x+y=6$, $2x+y=4$ ಮತ್ತು $x+2y=5$ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವೇನು ?

5 ಲಂಬಿಸಿದಾಗ (1, 2) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ $x^2+y^2+6x-2y=6$ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದ ಸಮೀಕರಣವೇನು ?

6 (—2, 0) ಮತ್ತು (4, 0) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಆಗಿರುವ ವ ತ್ತವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

7 (3, 0) ಮತ್ತು (5, 0) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು $2x+y=1$ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರವನ್ನುಳ್ಳ ವೃತ್ತವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

8 (—3, 11), (5, 9), (8, 0) ಮತ್ತು (6, 8) ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಆ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಹಾಗೂ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

6.2 ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ವೃತ್ತವೊಂದರ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಅದರ ಕೇಂದ್ರ Cಯು $(-g, -f)$ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ $\sqrt{g^2+f^2-c}$

$P(x_1, y_1)$ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ CPಯ ಓಟ $\frac{y_1+f}{x_1+g}$.

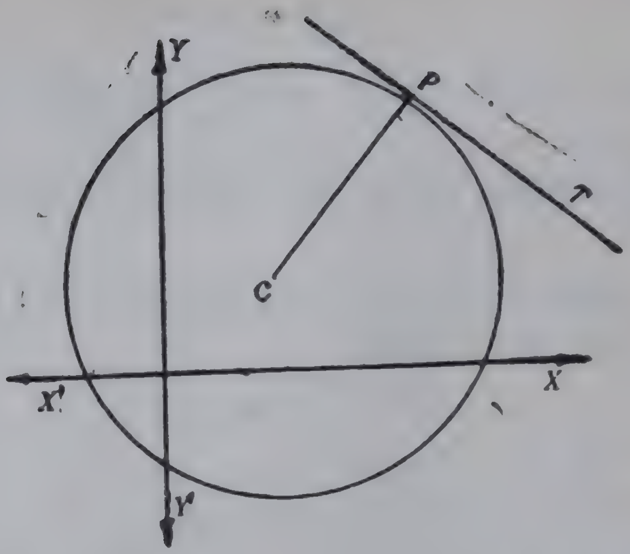


Fig 6.4

We know that the tangent PT at P to the circle is perpendicular to the radius CP.

$\therefore$ Slope of PT is $-\dfrac{x_1+g}{y_1+f}$

$\therefore$ Its equation is (since it passes through P),

$$y-y_1 = -\frac{x_1+g}{y_1+f}(x-x_1)$$

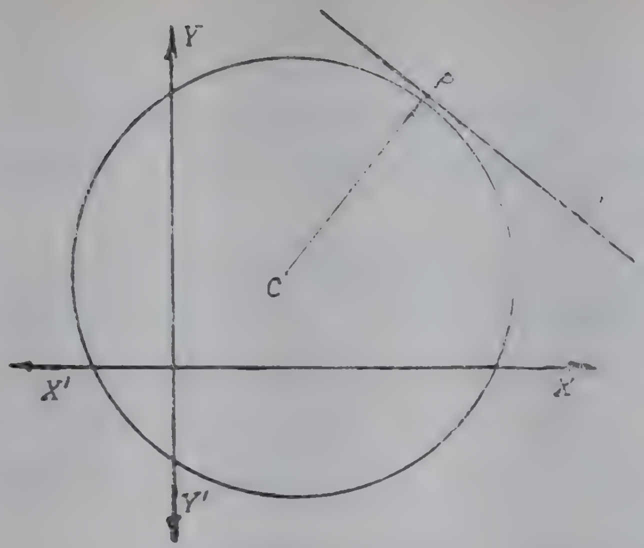
i.e., $xx_1+yy_1+gx+fy=x_1^2+y_1^2+gx_1+fy_1$.

Adding gx_1+fy_1+c to both sides and noting that $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$ ($\because$ (x_1, y_1) is a point on the circle), we see that

> the equation of the tangent at P (x_1, y_1) to the ci cle
> $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ is
> $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$.

Note :—The reader who is familiar with calculus will notice that the slope of the tangent at (x_1, y_1) to the circle $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ is

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = -\frac{x_1+g}{y_1+f}$$ which agrees with the expression given above.



ಚಿತ್ರ 6.4

Pಯಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ PTಯು CP ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$\therefore PT$ಯ ಓಟ $-\dfrac{x_1+g}{y_1+f}$

$\therefore$ ಅದರ ಸಮೀಕರಣ (ಅದು Pಯ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದರಿಂದ),

$$y-y_1 = -\frac{x_1+g}{y_1+f}(x-x_1)$$

ಅಥವಾ $x x_1+y y_1+gx+fy=x^2_1+y^2_1+gx_1+fy_1$.

ಎರಡೂ ಕಡೆಗೆ gx_1+fy_1+c ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ, [(x_1,y_1) ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ] $x^2_1+y^2_1+2gx_1+2fy_1+c=0$ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿದಾಗ,

$P(x_1, y_1)$ನಲ್ಲಿ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=o$ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಸೂಚನೆ: ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದ ಪರಿಚಯವಿರುವ ಓದುಗರು (x_1, y_1) ನಲ್ಲಿ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಓಟವು

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,\, y_1)} = -\frac{x_1+g}{y_1+f}$$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿರುವಂತೆ

ಇರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

1 *Find the equations of the tangents to the circle given by the equation $x^2+y^2+3x-2y-4=0$ at the points where the circle cuts the x-axis.*

The points where the circle cuts the axis of x have their y- co-ordinates zero. Hence those points can be obtained by putting $y=0$ in the given equation.

$$i.e. \quad x^2+3x-4=0 \quad \text{or} \quad (x-3)\,(x-1)=0.$$

$\therefore$ The circle meets the x-axis at (3, 0) and (1, 0).

The tangent at (3, 0) has the equation

$$x.3+y.0+\frac{3}{2}\,(x+3)-\frac{2}{2}\,.\,(y+0)-4=0.$$

$$i.e. \; 9x-2y+1=0.$$

Similarly the tangent at (1, 0) is $5x-2y-5=0$.

2 *If the line $lx+my=1$ touches $x^2+y^2=a^2$, then show that the point (l, m) lies on a circle.*

Given that $lx+my=1$ touches $x^2+y^2=a^2$.

$\therefore$ Perpendicular distance of $lx+my=1$ from the centre (0, 0) is equal to the radius a of the circle.

$$i.e. \quad \frac{1}{\sqrt{l^2+m^2}}=\pm a \quad \text{or} \quad l^2+m^2=\frac{1}{a^2}.$$

$\therefore$ (l, m) satisfies the equation $x^2+y^2=\frac{1}{a^2}$ which clearly represents a circle.

3 *Obtain the condition that the line $y=mx+c$ may touch the circle $x^2+y^2=a^2$. Find the point of contact if the condition is satisfied.*

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 $x^2+y^2+3x-2y-4=0$ ಸಮೀಕರಣವು ನಿರೂಪಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಅದು x–ಅಕ್ಷರೇಖೆಯನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಿರಿ.

ವೃತ್ತವು x–ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ y—ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $y=0$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಅಂದರೆ $x^2+3x-4=0$ ಅಥವಾ $(x-3)\ (x-1)\ =0.$

$\therefore$ ವೃತ್ತವು x—ಅಕ್ಷವನ್ನು $(3, 0)$ ಮತ್ತು $(1, 0)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

$(3, 0)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$x.3 + y.0 + \frac{2}{2}.(x+3) - 1.(y+0) - 4=0$$

ಅಥವಾ $9x-2y+1=0.$

ಹೀಗೆಯೇ $(1, 0)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $5x-2y-5=0$

2 $lx+my = 1$ ರೇಖೆಯು $x^2+y^2=a^2$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ (l, m) ಬಿಂದುವು ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$lx+my = 1$ ರೇಖೆಯು $x^2+y^2=a^2$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

$\therefore$ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ $(0, 0)$ ಯಿಂದ $lx+my = 1$ ರೇಖೆಗಿರುವ ಲಂಬ ದೂರವು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ a ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $\dfrac{1}{\sqrt{l^2+m^2}} = \pm\ a$ ಅಥವಾ $l^2+m^2 = \dfrac{1}{a^2}.$

$\therefore$ (l, m) ಬಿಂದುವು $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{a^2}$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಇದು ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವೆನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

3 $y=mx+c$ ರೇಖೆಯು $x^2+y^2=a^2$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಲು ಬೇಕಾದ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ. ಈ ನಿಬಂಧನೆಯು ಸಿದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

The given line touches the given circle if the distance of the line from the centre (0, 0) of the circle is equal to its radius a.

$$i.e.\ \pm \frac{c}{\sqrt{1+m^2}} = a \text{ or } c = \pm a\sqrt{1+m^2}.$$

$\therefore y=mx+c$ touches $x^2+y^2=a^2$ if $c=\pm a\sqrt{1+m^2}$ whatever m may be.

In other words, the line $y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}$ touches the circle $x^2+y^2=a^2$ irrespective of the value of m.

Let the point of contact in this case be (x', y').

The radius of the circle through (x', y) has the equation $y=-\frac{1}{m}x$ ($\because m$ is the slope of the tangent).

Since (x', y') is common to the radius and the tangent,

$$\text{we have } y'=-\frac{1}{m}x' \text{ and } y'=mx'\pm a\sqrt{1+m^2}$$

$$\text{Solving, we get } x'=\frac{-(\pm am)}{\sqrt{1+m^2}},\ y'=\frac{(\pm a)}{\sqrt{1+m^2}}$$

$\therefore$ The line $y=mx+a\sqrt{1+m^2}$ touches the circle at

$$\left(\frac{-am}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$

and the line $y=mx-a\sqrt{1+m^2}$ touches the circle at

$$\left(\frac{am}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{-a}{\sqrt{1+m^2}}\right).$$

Aliter :

The co-ordinates of points of intersection of the line and the circle satisfy the equations $y=mx+c$ and $x^2+y^2=a^2$ simultaneously.

ದತ್ತ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ (0, 0) ದಿಂದ ದತ್ತರೇಖೆ $y=mx+c$ ಗಿರುವ ಲಂಬ ದೂರವು ವತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾದಾಗ ದತ್ತರೇಖೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ.
∴ ಬೇಕಾದ ನಿಬಂಧನೆ

$$\pm \frac{c}{\sqrt{1+m^2}} = a \text{ ಅಥವಾ } c = \pm a\sqrt{1+m^2}$$

∴ $y=mx+c$ ರೇಖೆಯು $c = \pm a\sqrt{1+m^2}$ ಆದಾಗ mನ ಬೆಲೆ ಏನೇ ಆದರೂ $x^2+y^2=a^2$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಥವಾ $y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}$ ರೇಖೆಯು m ನ ಬೆಲೆಯು ಯಾವುದೇ ಆಗಲಿ, $x^2+y^2=a^2$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಯಾವಾಗಲೂ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ.
ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವು (x', y') ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ (x', y') ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಸಮೀಕರಣ $y=-\frac{1}{m}x$. (∵ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯ ಓಟ m).

(x', y') ಬಿಂದುವು ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$y'=-\frac{1}{m}x' \text{ ಮತ್ತು } y'=mx'\pm a\sqrt{1+m^2}.$$

ಬಿಡಿಸಿದರೆ ; $x'=-\dfrac{(\pm am)}{\sqrt{1+m^2}}$, $y'=\dfrac{(\pm a)}{\sqrt{1+m^2}}$

∴ $y=mx+a\sqrt{1+m^2}$ ರೇಖೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು

$\left[\dfrac{-am}{\sqrt{1+m^2}}, \dfrac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right]$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ,

$y=mx-a\sqrt{1+m^2}$ ರೇಖೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು

$\left[\dfrac{am}{\sqrt{1+m^2}}, \dfrac{-a}{\sqrt{1+m^2}}\right]$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಎರಡನೆಯ ವಿಧಾನ :

ದತ್ತರೇಖೆ ಹಾಗೂ ದತ್ತವೃತ್ತಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $y=mx+c$ ಮತ್ತು $x^2+y^2=a^2$ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತದೆ.

i.e., the x-co-ordinates of the points of intersection satisfy the equation $x^2+(mx+c)^2=a^2$. .... (1)

or $x^2(1+m^2)+2cmx+(c^2-a^2)=0$.

If the line touches the circle, the two points of intersection coincide and so the equation (1) should have equal roots. The condition for this is,

$$c^2m^2-(1+m^2)(c^2-a^2)=0$$

or, $c^2=a^2(1+m^2)$ or $c=\pm a\sqrt{1+m^2}$.

If the condition is satisfied, the sum of the roots of (1) is $2x=-2cm/(1+m^2)$,

$$\text{or } x=-\frac{m}{1+m^2}\left[\pm a\sqrt{1+m^2}\right]=\pm\left(\frac{(-am)}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$

The corresponding value of y is

$$y=m\left[\pm\frac{(-am)}{\sqrt{1+m^2}}\right]+c=\pm\left[\frac{-am}{\sqrt{1+m^2}}+a\sqrt{1+m^2}\right]$$

$$=\pm\frac{a}{\sqrt{1+m^2}}.$$

These give the co-ordinates of the point of contact.

Note :—The above discussion shows that for a circle there are two tangents parallel to a given direction.

Similarly one can obtain the condition that the line $lx+my+n=0$ may touch $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$. (The student may take up this as an exercise).

4 *Find the circle which passes through the point* (2, —1) *and is tangent to the line* $x+y+1=0$ *at the point* (0, —1).

Since the circle must pass through the points (2, —1) and (0, —1), its centre will lie on the perpendicular bisector of the segment connecting these points.

i.e., on the line $x=1$ .... (1)

The centre must also lie on the line perpendicular to $x+y+1=0$

at the point (0, —1). *i.e.*, on the line $x-y-1=0$.... (2)

∴ ಈ ಬಿಂದುಗಳ x–ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$$x^2+(mx+c)^2=a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ಅಥವಾ $x^2(1+m^2)+2cmx+c^2-a^2=0$ ಸಮೀಕರಣವನು ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ ರೇಖೆಯು ದತ್ತ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ, ಎರಡು ಸಂಗಮ ಬಿಂದುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದರಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು ಸಮವಾಗ ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ.

ಇದಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ನಿಬಂಧನೆ $c^2m^2-(1+m^2)(c^2-a^2)=0$

ಅಥವಾ $c^2=a^2(1+m^2)$ ಅಥವಾ $c=\pm a\sqrt{1+m^2}$.

ಈ ನಿಬಂಧನೆಯು ಸಿದ್ಧಿತವಾದಾಗ, ಸಮೀಕರಣ (1) ರ ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ $2x=-2cm/(1+m^2)$.

ಅಥವಾ $x=-\dfrac{m}{1+m^2}\left[\pm a\sqrt{1+m^2}\right]=\pm\left(\dfrac{-am}{\sqrt{1+m^2}}\right)$

ಇದಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡ y ನ ಬೆಲೆ

$$y=m\left[\pm\frac{(-am)}{\sqrt{1+m^2}}\right]+c=\pm\left[\frac{-am}{\sqrt{1+m^2}}+a\sqrt{1+m^2}\right]$$

$$=\pm\frac{a}{1+m^2}.$$

ಇವು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ.

ಸೂಚನೆ : ಈ ಮೇಲಿನ ಪರಿಶೀಲನೆಯಿಂದ, ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಕುರಿತ ದಿಕ್ಕಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರತಕ್ಕ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದರಂತೆಯೇ $lx+my+n=0$ ರೇಖೆಯು $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಲು ಬೇಕಾದ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಇದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು.)

4 (2, −1) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ $x+y+1=0$ ರೇಖೆಯನು (0, −1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

ವೃತ್ತವು (2, −1) ಮತ್ತು (0, −1) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗ ಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅದರ ಕೇಂದ್ರವು ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಭಾಗದ ಲಂಬಾರ್ಧಕದ ಮೇಲೆ ಅಂದರೆ $x=1$ ....(1)
ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರುವುದು.

ಅಲ್ಲದೆ ಕೇಂದ್ರವು $x+y+1=0$ ರೇಖೆಗೆ (0, −1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿರುವ ಲಂಬದ ಮೇಲೂ ಅಂದರೆ $x-y-1=0$....(2)
ರೇಖೆಯ ಮೇಲೂ ಇರುವುದು.

Solving (1) and (2), we get $x=1$, $y=0$.

$\therefore$ The centre is (1, 0) ...

and the radius is $\sqrt{(2-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$.

$\therefore$ The required equation is $(x-1)^2+y^2=2$

or $x^2+y^2-2x-1=0$.

5 *Find the equations of the tangents from the origin to the circle* $x^2+y^2-6x-2y+8=0$.

The centre of the given circle is (3, 1).

The radius is $\sqrt{3^2+1^2-8} = \sqrt{2}$.

The equation of any line through the origin is $y=mx$. This line will be a tangent to the circle if the length of the perpendicular drawn from the centre (3, 1) to the line is equal to the radius $\sqrt{2}$.

$$i.e., \text{ if } \pm\frac{3m-1}{\sqrt{1+m^2}}=\sqrt{2}$$

$$i.e. \text{ if } 2(1+m^2) = (3m-1)^2$$

$$\text{or } 2+2m^2=9m^2-6m+1$$

$$i.e., \text{ if } 7m^2-6m-1=0.$$

$$\text{or } m=1 \text{ or } -\frac{1}{7}.$$

$\therefore$ The equations of the tangents are $y=x$ and

$$y=-\frac{1}{7}x.$$

Exercises 6.2

1 Write down the equation of the tangent to each of the following circles at the given point.

(i) $x^2+y^2-4=0$ at (2, 2).

(ii) $x^2+y^2+8x-y=0$ at (0, 0).

(iii) $x^2+y^2+5x+3y-4=0$ at (1, -1).

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ $x=1,\ y=0$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$\therefore$ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ $(1,\ 0)$.

ತ್ರಿಜ್ಯ $\sqrt{(2-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}.$

$\therefore$ ಬೇಕಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ $(x-1)^2+y^2=2$

ಅಥವಾ $x^2+y^2-2x-1=0.$

5 $x^2+y^2-6x-2y+8=0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ $(3,\ 1)$.

ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯ $\sqrt{3^2+1^2-8}=\sqrt{2}.$

ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖೆಯೊಂದರ ಸಮೀಕರಣ

$$y=mx.$$

ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಈ ರೇಖೆಗಿರುವ ಲಂಬದೂರ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮವಾದರೆ,

ಅಂದರೆ $\pm\dfrac{3m-1}{\sqrt{1+m^2}}=\sqrt{2}$ ಅಥವಾ $7m^2-6m-1=0$

ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $m=1$, ಅಥವಾ $m=-\dfrac{1}{7}$ ಆದಾಗ $y=mx$ ರೇಖೆಯು ದತ್ತ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ.

$\therefore$ $y=x$ ಮತ್ತು $y=-\dfrac{1}{7}x$ ಗಳು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ದತ್ತ ವೃತ್ತಕ್ಕೆಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 6.2

1 ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೂ ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $x^2+y^2-4=0$, $(2,\ 2)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ.

(ii) $x^2+y^2+8x-y=0$, $(0,\ 0)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ.

(iii) $x^2+y^2+5x+3y-4=0$, $(1,-1)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ.

2 Write down the equations of the tangents to each of the following circles at the points where they cross the co-ordinate axes.

(i) $x^2+y^2-16=0$.
(ii) $x^2+y^2+3x+5y+4=0$.
(iii) $x^2+y^2+x-2=0$.

3 Find the tangents to

(i) $x^2+y^2=1$ parallel to $3x=4y$.
(ii) $x^2+y^2=2$ perpendicular to $x+5y=0$.
(iii) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ parallel to the x—axis.
(iv) $x^2+y^2-6x-2y+9=0$ through the origin.

4 (i) Show that $y=x+5\sqrt{2}$ touches the circle $x^2+y^2=25$.
(ii) For what values of k will the straight line $6x+y=k$ touch the circle $x^2+y^2=16$?
(iii) Show that $5x+12y-4=0$ touches the circle $x^2+y^2-6x+4y+12=0$.

Find the point of contact in each case.

5 A circle passes through the points $(-1, 1)$, $(0, 6)$ and $(5, 5)$. Find the equations of the tangents which are parallel to the line joining the origin and the centre.

6 Find the equation of the circle which

(i) has its centre at $(1, 2)$ and touches $x-y+2=0$.
(ii) touches the axes and also $3x+4y-1=0$.
(iii) touches the axes of co-ordinates and also the line $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, the centre being in the first quadrant.

2 ಈ ಕೆಳಗಿನ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಅವು ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $x^2+y^2-16=0$

(ii) $x^2+y^2+3x+5y+4=0$

(iii) $x^2+y^2+x-2=0$.

(i) $x^2+y^2=1$ ಕ್ಕೆ $3x=4y$ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ

(ii) $x^2+y^2=2$ ಕ್ಕೆ $x+5y=0$ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ

(iii) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ಗೆ x ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ

(iv) $x^2+y^2-6x-2y+9=0$ಗೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಇರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

4 (i) $y=x+5\sqrt{2}$ ರೇಖೆಯು $x^2+y^2=25$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(ii) kಯು ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ $6x+y=k$ ರೇಖೆಯು $x^2+y^2=16$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ ?

(iii) $5x+12y-4=0$ ರೇಖೆಯು $x^2+y^2-6x+4y+12=0$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

5 ಒಂದು ವೃತ್ತವು $(-1, 1)$, $(0, 6)$ ಮತ್ತು $(5, 5)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುತ್ತದೆ. ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆಳೆದ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

6 (i) $(1, 2)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ, $x-y+2=0$ ರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ;

(ii) ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಮತ್ತು $3x+4y-1=0$ ರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ;

(iii) ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಮೊದಲನೆಯ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಹೊಂದಿ, ಅಕ್ಷಗಳನ್ನೂ

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ರೇಖೆಯನ್ನೂ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ,

ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

6.3 Length of a tangent from a point to the circle—

Let $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ be a circle. Then its centre is $C\equiv(-g, -f)$ and radius is $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$.

Let $P\ (x_1, y_1)$ be a point not on the circle. Let a tangent from P touch the circle at T.

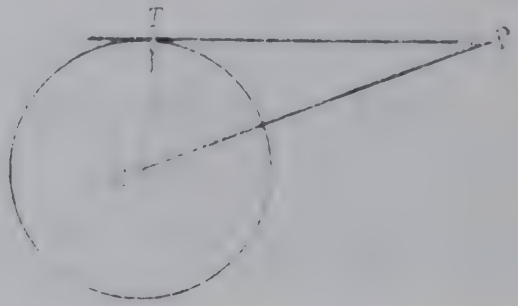


Fig 6.5

Since $CT \pm PT$, $\perp$ have

$$CP^2=CT^2+TP^2 \text{ or } CP^2=r^2+TP^2$$

But $CP^2=(x_1+g)^2+(y_1+f)^2$

$$\therefore \quad TP^2=(x_1+g)^2+(y_1+f)^2-r^2$$

$$=(x_1^2+y_1^2+g^2+f^2+2gx_1+2fy_1)-(g^2+f^2-c)$$

$$=x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$$

$$\therefore \quad TP=[x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c]^{\frac{1}{2}}$$

Thus,

> The length of the tangent from $(x_1 y_1)$ to the circle $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$ is $\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$

Cor. :—Length of the tangent from (x_1, y_1) to the circle $x^2+y^2=r^2$ is $\left|[x_1^2+y_1^2-r^2]^{\frac{1}{2}}\right|$

Note :—TP^2 is positive if P is outside the circle, TP^2 is negative if P is inside the circle and TP^2 is zero if P is on the circle.

6.3 ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದ

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ವೃತ್ತವೊಂದರ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿರಲಿ. ಅದರ ಕೇಂದ್ರ $C\equiv(-g,-f)$ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$.

P (x_1, y_1) ಎಂಬುದು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿಲ್ಲದ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. P ಯಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆವ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ವೃತ್ತವನು T ಯಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಲಿ.

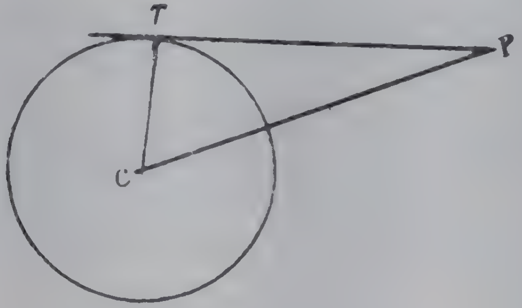


Fig. 6·5

$CT \perp PT$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$CP^2=CT^2+TP^2=r^2+TP^2$$

ಆದರೆ $CP^2=(x_1+g)^2+(y_1+f)^2$

$$\therefore TP^2=(x_1+g)^2+(y_1+f)^2-r^2$$
$$=(x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+g^2+f^2)-(g^2+f^2-c)$$
$$=x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$$
$$\therefore TP=[x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c]^{\frac{1}{2}}$$

ಆದ್ದರಿಂದ,

(x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದ $\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$

ಉ.ಪ್ರ.— (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x^2+y^2=r^2$ ವೃತ್ತಕ್ಕಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದ $\left|[x_1^2+y_1^2-r^2]^{\frac{1}{2}}\right|$

ಸೂಚನೆ:— P ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಡೆ ಇದ್ದರೆ TP^2 ಧನವಾಗಿಯೂ, P ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಒಳಗಡೆ ಇದ್ದರೆ TP^2 ಋಣವಾಗಿಯೂ, P ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ TP^2 ಶೂನ್ಯವಾಗಿಯೂ ಇರುವುದು.

Exercises 6.3

1 Without drawing a figure determine whether the points (0, 0), (1, 0), (—1, —1) lie outside, on the circumference, or inside the circle $x^2+y^2+4x+8y-5=0$.

2 Prove that the tangents from (1, 8) to the circles $x^2+y^2+6x-5=0$ and $x^2+y^2=6$ are equal in lengths.

3 Find the length of the tangent from a point of the circle $x^2+y^2+2x+2y-8=0$ to $x^2+y^2+2x+2y-1=0$.

4 Find the points on the line $x-y+1=0$, the tangents from which to the circle $x^2+y^2-3x=0$ are of length 2.

5 Find the locus of points, the lengths of tangents from which to the circle $4x^2+4y^2=9$ and $9x^2+9y^2=16$ are in the ratio 1 : 2.

6 Two circles are such that the length of the tangent from a point on one of them to the other is always a constant. Show that the circles are concentric. Find the difference of their radii.

6.4 Orthogonal Circles—

Let S and S' be two intersecting circles. Let P be a point of intersection. Then we define the angle between the two circles at P as the angle between the tangents to the two circles at that point. If this angle is $\frac{\pi}{2}$, we say that the circles are mutually orthogonal. From the definition of orthogonal circles, it follows that the two circles are orthogonal if the radii of the two circles through the point of intersection are perpendicular.

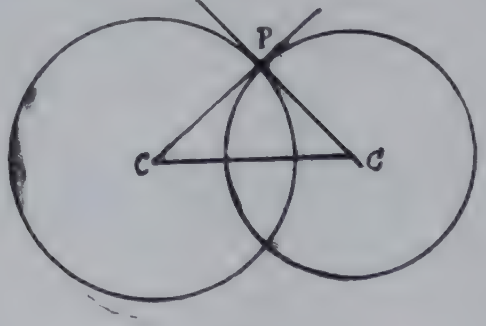


Fig. 6.6

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 6.3

1 ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯದೆಯೇ (0, 0), (1, 0), (—1, —1) ಬಿಂದುಗಳು $x^2+y^2+4x+8y-5=0$ ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಡೆ, ಒಳಗಡೆ ಅಥವಾ ಮೇಲೆ ಇವೆಯೋ ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

2 (1, 8) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x^2+y^2+6x-5=0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2=6$ ವ ತ್ತಗಳಿಗಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

3 $x^2+y^2+2x+2y-8=0$ ವೃತ್ತದ ಬಿಂದುವೊಂದರಿಂದ

$$x^2+y^2+2x+2y-1=0$$

ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದವೇನು ?

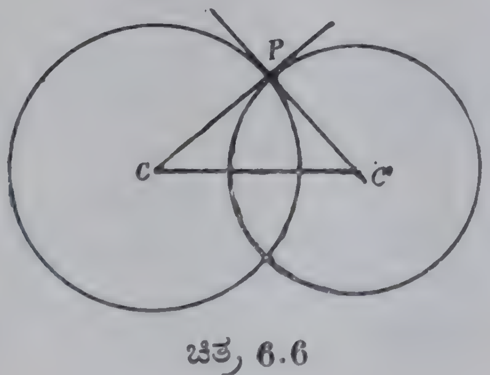
4 $x^2+y^2-3x=0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ $x-y+1=0$ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೋ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದವು 2 ಆಗಿದ್ದರೆ ಆ ಬಿಂದುಗಳಾವುವು ?

5 $4x^2+4y^2=9$ ಮತ್ತು $9x^2+9y^2=16$ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಪ್ರಮಾಣವು 1 : 2 ಆಗಿರುವಂತಹ ಬಿಂದುಗಳ ಪಥವೇನು ?

6 ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದವು ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ. ಆ ವೃತ್ತಗಳು ಏಕ ಕೇಂದ್ರ ವ ತ್ತಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6.4 ಲಂಬ ವೃತ್ತಗಳು

S ಮತ್ತು S' ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಾಗಿರಲಿ. Pಯು ಒಂದು ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ನಾವು Pಯಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ವೃತ್ತಗಳಿಗಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಕೋನವು 90° ಆದಾಗ ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಲಂಬ ವೃತ್ತಗಳ ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ, ವೃತ್ತಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವಾಗಿರುವುವು ಎಂದು ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 6.6

Let the equations of S and S' be

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

and $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$

Their centres, say C and C', are respectively $(-g, -f)$ and $(-g', -f')$

and $PC^2=g^2+f^2-c, \quad PC'^2=g'^2+f'^2-c'$

The condition that S and S' may be orthogonal is that PC is perpendicular to PC'

$$\therefore \quad CC'^2=PC^2+PC'^2$$

i.e. $(-g+g')^2+(-f+f')^2=g^2+f^2-c+g'^2+f'^2-c'$

Simplifying this we find that

the condition that the circles $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ and $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ may cut orthogonally is $2gg'+2ff'=c+c'$.

Examples

1 *Show that, whatever may be the value of k, the circles $x^2+y^2+2x+2yk+3=0$ and $x^2+y^2+3x+y+k=0$ cut each other orthogonally.*

Here $g=1$; $g'=\dfrac{3}{2}$, $f=k$; $f'=\dfrac{1}{2}$, $c=3$, $c'=k$

The two circles cut each other if

$$2.1.\ \frac{3}{2}+2.k.\ \frac{1}{2}=3+k.$$

i.e. if $3+k=3+k$

which is true whatever value k may have.

2 *Find the equation of the circle which has its centre at $(-2, 2)$ and cutting the circle $x^2+y^2+2x+2y+2=0$ orthogonally.*

Let the equation of the required circle be

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0.$$

Then by hypothesis $-g=-2$; $-f=2$.

S ಮತ್ತು S' ಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \qquad (1)$$

ಮತ್ತು $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ (2) ಆಗಿರಲಿ.

ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳು C ಮತ್ತು C' ಆದರೆ $(-g, -f)$ ಮತ್ತು $C'\equiv(-g', -f')$. ಮತ್ತು $PC^2=g^2+f^2-c$, $PC'^2=g'^2+f'^2-c'$ ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರಬೇಕಾದ ನಿಬಂಧನೆ $PC\perp PC'$.
ಅಂದರೆ $CC'^2=PC^2+PC'^2$.

ಅಂದರೆ $(-g+g')^2+(-f+f')^2=g^2+f^2-c+g'^2+f'^2-c'$
ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿದರೆ,

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$
ಮತ್ತು $x^2+y^2+2gx'+2f'y+c'=0$
ಲಂಬವಾಗಿರಲು ಬೇಕಾಗಿರುವ ನಿಬಂಧನೆ $2gg'+2ff'=c+c'$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 k ಯ ಬೆಲೆ ಯಾವುದೇ ಆಗಿರಲಿ,

$x^2+y^2+2x+2ky+3=0$ ಮತ್ತು
$x^2+y^2+3x+y+k=0$ ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುವು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ $g=1,\ g'=\frac{3}{2},\quad f=k,\quad f'=\frac{1}{2},\quad c=3,\ c'=k.$

ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಲು ಬೇಕಾದ ನಿಬಂಧನೆ

$$2\cdot1\cdot\frac{3}{2}+2\cdot k\quad\frac{1}{2}=3+k \text{ ಅಥವಾ } 3+k=3+k.$$

kಯ ಬೆಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಇದು ಸತ್ಯ.

2 $x^2+y^2+2x+2y+2=0$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ $(-2, 2)$ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವನ್ನಾಗಿ ಉಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

ಬೇಕಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ಆಗಿರಲಿ.

ದತ್ತದ ಪ್ರಕಾರ $-g=-2$; $-f=2$.

Since this circle cuts the given circle orthogonally

$$2g.1+2f.1=c+2$$

i.e. $2-4=c+2$ or $c=-4$.

$\therefore$ The required circle is $x^2+y^2+4x-4y-4=0$.

Exercises **6.4**

1 Show that the following pairs of circles are mutuall orthogonal.

(i) $x^2+y^2-4x+2y-2=0$ and $x^2+y^2+6x-2y-12=0$.

(ii) $x^2+y^2+4x-4y+2=0$ and $x^2+y^2+2x+2y-2=0$.

(iii) $x^2+y^2+2gx+c=0$ and $x^2+y^2+2fy-c=0$.

2 Find the equations to two equal circles wit centres at (2, 3) and (5, 6) which cut each other orthogonall

3 Find the circle which passes through (1, 0) an (−1, 0) and cuts $x^2+y^2+2x+2y-1=0$ orthoganally.

4 Find the equation of the circle which passes throug the origin, has its centre on $x+y=4$ and cuts orthogonall the circle $x^2+y^2-4x+2y+4=0$.

6.5 Radical Axis of two Circles—

Let S and S' be two circles and P be a point. Let P b such that the lenghts of tangents from P to the two circle are equal. Then the locus of P is called the radical axis c the circles. *Thus by a radical axis of two circles, we mea the locus of a point such that the lengths of tangents from to the two circles are equal.* It will be seen shortly that th locus is a line perpendicular to the line joining the centre of the circles. Also, the radical axis passes through th

ಈ ವೃತ್ತವು ದತ್ತ ವೃತ್ತವನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದರಿಂದ

$$2g.1+2f.1=c+2$$

ಅಂದರೆ $2-4=c+2$ ಅಥವಾ $c=-4$.

$\therefore$ ಬೇಕಾಗಿರುವ ವೃತ್ತ

$$x^2+y^2+4x-4y-4=0.$$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 6.4

1 ಈ ಕೆಳಕಂಡ ವೃತ್ತ ದ್ವಯಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವುವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

(i) $x^2+y^2-4x+2y-2=0$; $x^2+y^2+6x-2y-12=0$.

(ii) $x^2+y^2+4x-4y+2=0$; $x^2+y^2+2x+2y-2=0$.

(iii) $x^2+y^2+2gx+c=0$; $x^2+y^2+2fy-c=0$.

2 ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ, (2, 3) ಮತ್ತು (5, 6) ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಎರಡು ಸಮವೃತ್ತಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

3 (1, 0) ಮತ್ತು (—1, 0) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಹಾಗೂ $x^2+y^2+2x+2y-1=0$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

4 ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ, $x+y=4$ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತು $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ಸಮಿಾಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

6.5 ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ರೇಖೆ

S ಮತ್ತು S' ಎಂಬುವು ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳೂ P ಎಂಬುದು ಒಂದು ಬಿಂದುವೂ ಆಗಿರಲಿ. P ಯಿಂದ ಎರಡೂ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವಂತೆ P ಇರಲಿ. ಆಗ P ಯ ಬಿಂದು ಪಥವನ್ನು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ರೇಖೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ರೇಖೆಯೆಂದರೆ, ಎರಡೂ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವುಳ್ಳ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನೆಳೆಯಬಹುದಾದ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲವುಗಳ ಗಣ ಎಂದು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಮುಂದೆ ನೋಡುವಂತೆ ಈ (ಬಿಂದು ಪಥವು) ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ರೇಖೆ

points of intersection of the circles if they intersect, and i touches both of them at the point of contact if they touch each other. (See Fig., 6.7 (a), (b), (c) and (d).

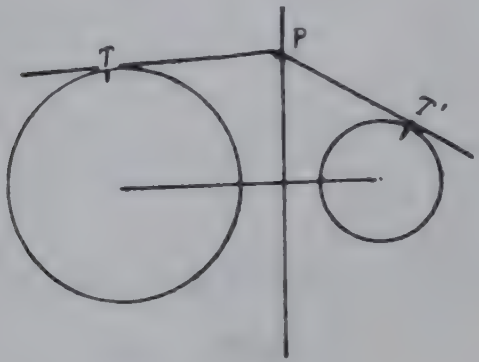


Fig. 6.7 (*a*)

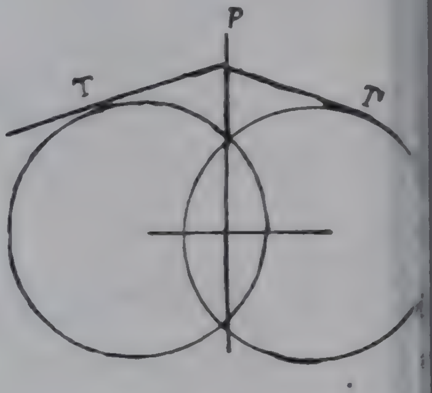


Fig. 6.7 (*b*)

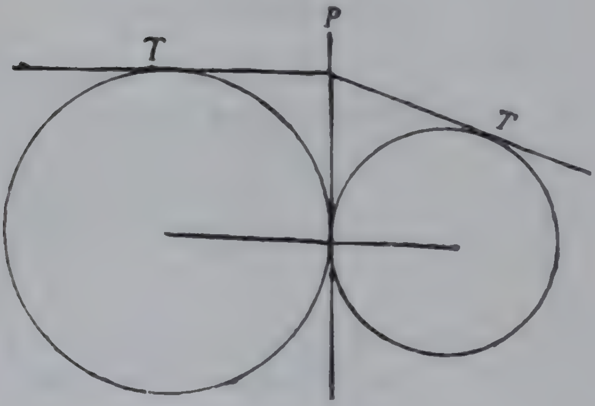


Fig. 6.7 (*c*)

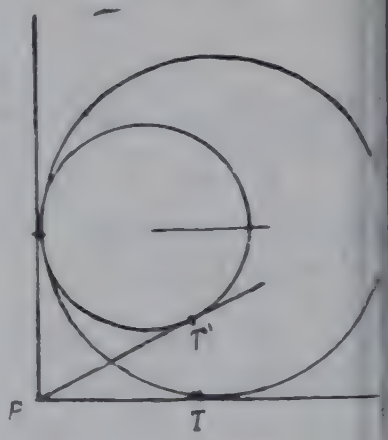


Fig. 6.7 (*d*)

Let $S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ....(1)

and $S' \equiv x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ ....(2)

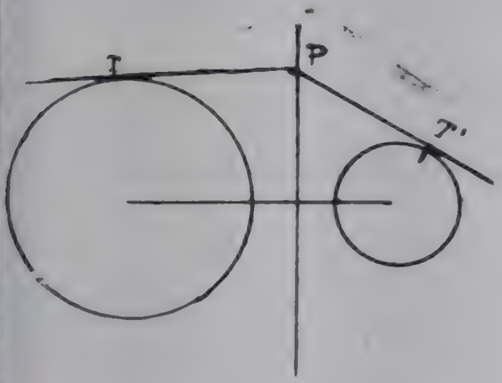
be two circles.

Let (x_1, y_1) be any point on the radical axis. Then the lengths of tangents from this point to (1) and (2) are equal.

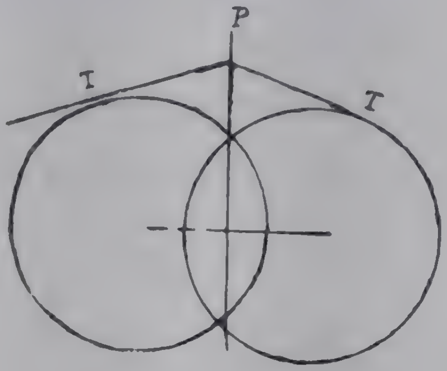
i.e. $x_1{}^2+y_1{}^2+2gx_1+2fy_1+c=x_1{}^2+y_1{}^2+2g'x_1+2f'y_1+c'$

or $2(g-g')\,x_1+2\,(f-f')\,y_1+c-c'=0$

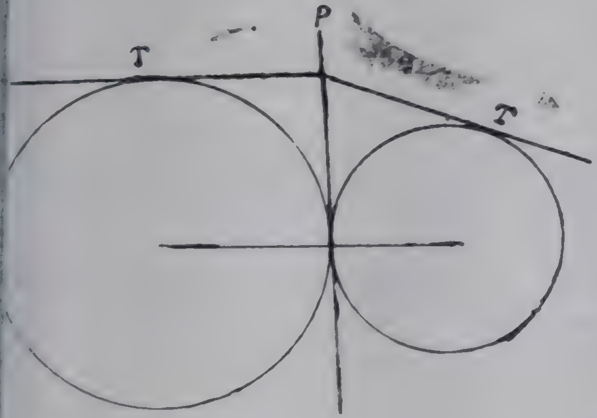
ಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ, ಈ ರೇಖೆಯು, ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇಧಿಸಿದರೆ, ಸಂಗಮ ಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು. ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ, ಸ ರ್ಶ ಬಿಂದು ಲ್ಲಿ ಅವೆರಡನ್ನೂ ಸ ರ್ಶಿಸುತ ದೆ. (ಚಿತ್ರ 6.7 (a), (b), (c) ಮತ್ತು (d) ನೋಡಿ).



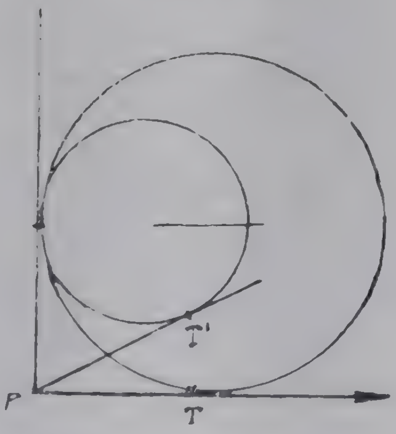
ಚಿತ್ರ 6.7(a)



ಚಿತ್ರ 6.7 (b)



ಚಿತ್ರ 6.7 (c)



ಚಿತ್ರ 6.7 (d)

$$S \equiv x^2+y^2+2\ x+2fy+c=0 \quad ....$$

ಮತ್ತು $S' \equiv x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0 ....(2)$ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಾಗಿರಲಿ.

(x_1, y_1) ಎನ್ನುವುದು ಮೂಲಾಕ್ಷರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ (1) ಮತ್ತು (2) ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಉದ ಗಳು ಸಮ.

ಅಂದರೆ $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=x_1^2+y_1^2+2g'x_1+2f'y_1+c'$

ವಾ $2(g-g')x_1+2(f-f')y_1+c-c'=0.$

But this is the condition that the point (x_1, y_1) should lie on the locus

$$S-S' \equiv 2(g-g')x+2(f-f')\,y+c-c'=0. \qquad ....(3)$$

This is therefore the equation of the radical axis, and it is clearly a straight line.

Also, its slope is $-\dfrac{g-g'}{f-f'}$ ....(4)

But, the slope of the line joining the centres is

$$\frac{f-f'}{g-g'} \qquad ....(5)$$

From (4) and (5) it follows that the radical axis is perpendicular to the line joining the centres of the circles.

Moreover from the equation (3), it follows that the co-ordinates of a point which satisfy $S=0$ and $S'=0$ simultaneously will satisfy $S-S'=0$ also. That means the radical axis passes through the points of intersection of the two circles.

We notice that if we have a set of circles all of which have the same two common points, the radical axis of each pair taken from this set is the same. (*i.e.* the line passing through the common points). We call such a set of circles which every pair taken out of them have the same radical axis, as a system of *Co axal circles.*

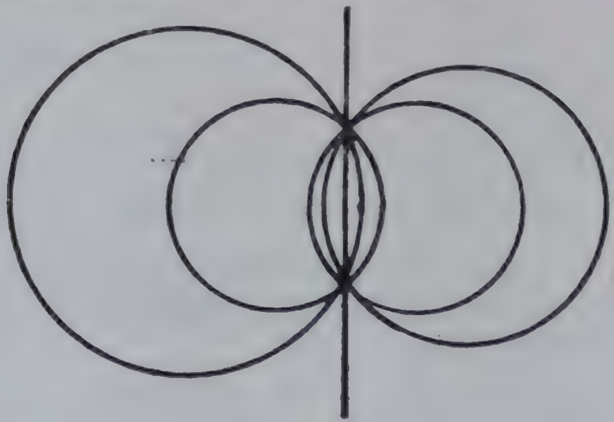


Fig. 6.8

ಅದರೆ ಇದು (x_1, y_1) ಬಿಂದುವು

$S-S' \equiv 2(g-g')x+2(f-f')y+(c-c')=0$ .... (3) ಬಿಂದು ಪಥದ ಮೇಲಿರಬೇಕಾದ ನಿಬಂಧನೆ.

$\therefore$ $S-S'=0$ ಎಂಬುದು ಮೂಲಾಕ್ಷರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ. ಇದೊಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

$$\text{ಇದರ ಓಟ} - \frac{g-g'}{f-f'} \quad .... (4)$$

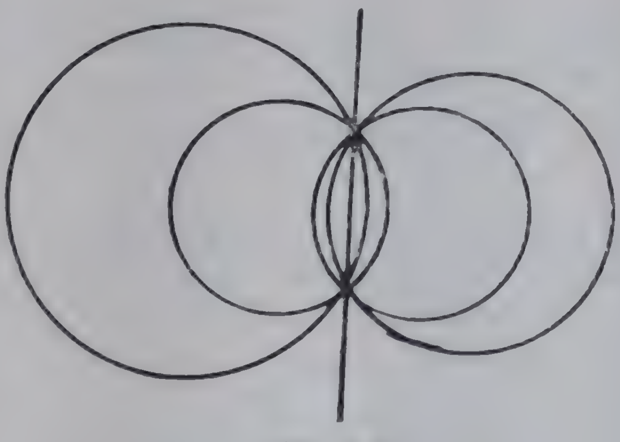
$$\text{ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಓಟ} = \frac{f-f'}{g-g'} \quad .... (5)$$

(4) ಮತ್ತು (5)ರಿಂದ, ಮೂಲಾಕ್ಷ ರೇಖೆಯು ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

ಅಲ್ಲದೆ ಸಮೀಕರಣ 3 ರಿಂದ, $S=0$ ಮತ್ತು $S'=0$ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $S-S'=0$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದೂ ಸ್ಪಷ್ಟ. ಹಾಗೆಂದರೆ ಮೂಲಾಕ್ಷರೇಖೆಯು ವೃತ್ತಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದರ್ಥ.

ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ವೃತ್ತಗಳ ಗಣವೊಂದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಈ ಗಣದಿಂದ ಆರಿಸಿದ ಯಾವೆರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷರೇಖೆಯು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ (ಅಂದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯೇ ಎಲ್ಲ ವೃತ್ತಗಳ ದ್ವಯ ಮೂಲಾಕ್ಷರೇಖೆ) ಎಂಬುದನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಒಂದು ವೃತ್ತಗಣದಿಂದ ಆರಿಸಿದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಒಂದೇ ಮೂಲಾಕ್ಷ ರೇಖೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತಹ ವೃತ್ತಗಣವನ್ನು ನಾವು ಏಕಾಕ್ಷ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯೂಹ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 6.8

We also notice that, if $S=0$, $S'=0$, $S''=0$ be three circles, the radical axes of these circles taken in pairs are

$S-S'=0$; $S'-S''=0$; $S''-S=0$ which are clearly three concurrent lines, as the sum of the left sides of these equations vanish. We call such a point at which the radical axes of three circles taken in pairs meet, as the *radical centre* of the three circles.

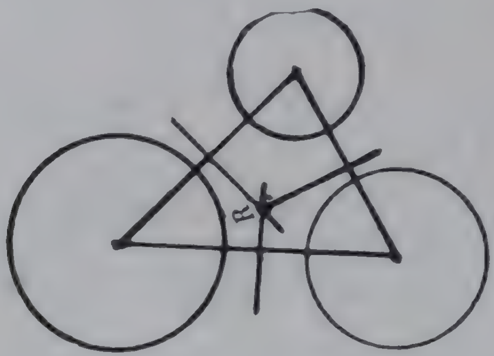


Fig. 6.9

Examples

1 *Find the radical centre of the sets of circles*

$$x^2+y^2+x+2y+3=0,$$
$$x^2+y^2+2x+4y+5=0, \text{ and}$$
$$x^2+y^2-7x-8y-9=0.$$

Denoting the equations of the circles respectively b $S=0$; $S'=0$; $S''=0$; we have the radical axis of first tw as $S-S'=0$ *or* $x+2y+2=0$ (1)

and the radical axis of the last two as $S'-S''=0$

or $9x+12y+14=0$. (2).

The radical centre is the intersection of (1) and (2), a the radical axis of the first and the last circle should als pass through this point.

Solving (1) and (2) we get

$$x=-\tfrac{2}{3}, \quad y=-\tfrac{2}{3}$$

$\therefore (-\tfrac{2}{3}, \ -\tfrac{2}{3})$ is the radical centre.

$S=0$, $S'=0$, $S''=0$ ಎಂಬುವು ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳಾದಾಗ, ಈ ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳಿಂದ ಆರಿಸಿದ ವೃತ್ತದ್ವಯಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷಗಳು $S-S'=0$; $S'-S''=0$ $S''-S=0$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಎಡಭಾಗಗಳ ಮೊತ್ತವು ಶೂನ್ಯವಾಗುವುದರಿಂದ, ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು ನಿರೂಪಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದು ಸಂಪಾತಗಳೆಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡೆರಡನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನಿರ್ಧರಿಸಿದ ಮೂಲಾಕ್ಷ ರೇಖೆಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವನ್ನು ನಾವು ಆ ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಚಿತ್ರ 6.9

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 $x^2+y^2+x+2y+3=0$, $x^2+y^2+2x+4y+5=0$, ಮತ್ತು $x^2+y^2-7x-8y-9=0$ ಈ ವೃತ್ತಗಣದ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ $S=0$, $S'=0$, $S''=0$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ, ಮೊದಲೆರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷರೇಖೆ $S-S'=0$ ಅಥವಾ $x+2y+2=0$ (1) ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷರೇಖೆ $S'-S''=0$ ಅಥವಾ

$$9x+12y+14=0 \quad (2).$$

ಮೊದಲನೆಯ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ಈ ಎರಡು ಮೂಲಾಕ್ಷಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಂಪಾತವಾಗಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರವು (1) ಮತ್ತು (2) ರ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವಾಗಿರಬೇಕಾಗುವುದು.

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ $x=-\frac{2}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$.

$\therefore\ (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ ಬಿಂದುವೇ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರ

2 *Prove that the two circles*
$x^2+y^2+2ax+c=0$ *and* $x^2+y^2+2by+c=0$ *touch if*
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c}.$$

We use the fact that if the radical axis of two circles touches one of them, it touches the other also, and the circles touch.

The radical axis of the two circles is
$$2ax-2by=0 \quad or \quad ax-by=0.$$

This will be a tangent to one of the circles, say the first one if (distance of the centre $(-a, 0)$ from the line is equal to the radius $\sqrt{a^2-c}$).
$$\frac{-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{a^2-c}.$$
i.e., if $a^4=(a^2-c)(a^2+b^2)$
i.e., if $a^2b^2=c(a^2+b^2)$
$$or \ \frac{1}{c}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

Exercises 6.5

1 Find the radical axis of each of the following pairs of circles

(i) $x^2+y^2-4x-2y-11=0, \quad x^2+y^2-2x-6y+1=0$
(ii) $4x^2+4y^2-16y+5=0, \quad x^2+y^2+y-1=0$
(iii) $x^2+y^2+ax+by+c=0, \quad x^2+y^2+bx+ay+c=0.$

2 Find the radical centre of each of the following sets of circles.

(i) $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2-2x-2y=5$, $x^2+y^2+4x+6y=19$.
(ii) $x^2+y^2+4x+7=0$, $2x^2+2y^2+3x+5y+9=0$, $x^2+y^2+y=0$.
(iii) $x^2+y^2+x+2y+3=0$, $x^2+y^2+2x+4y+5=0$ $x^2+y^2-7x-8y-9=0$.

2 $x^2+y^2+2ax+c=0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2+2by+c=0$

ವೃತ್ತಗಳು $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$ ಆದಾಗ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುವು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ, ಮತ್ತೊಂದನ್ನೂ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಬೇಕು. ಹಾಗೂ ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ರೇಖೆ $ax-by=0$. ಈ ರೇಖೆಯು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಬೇಕಾದರೆ ಕೇಂದ್ರ $(-a, 0)$ ನಿಂದ, ಈ ರೇಖೆಗಿರುವ ಲಂಬದೂರ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ $\sqrt{a^2-c}$ ಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಬೇಕಾಗುವುದು.

ಅಂದರೆ $\frac{-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{a^2-c}$

ಅಥವಾ $a^4=(a^2-c)(a^2+b^2)$

ಅಥವಾ $a^2b^2=c(a^2+b^2)$

ಅಂದರೆ $\frac{1}{c} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ ಆಗಬೇಕಾಗುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 6.5

1 ಈ ಕೆಳಗಿನ ವೃತ್ತದ್ವಯಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x^2+y^2-4x-2y-11=0,\ x^2+y^2-2x-6y+1=0.$

(ii) $4x^2+4y^2-16y+5=0,\ x^2+y^2+y-1=0.$

(iii) $x^2+y^2+ax+by+c=0,\ x^2+y^2+bx+ay+c=0.$

2 ಈ ಕೆಳಗಿನ ವೃತ್ತ ಗಣಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x^2+y^2=9,\ x^2+y^2-2x-2y=5,$
$x^2+y^2+4x+6y=19$

(ii) $x^2+y^2+4x+7=0,\ 2x^2+2y^2+3x+5y+9=0,$
$x^2+y^2+y=0$

(iii) $x^2+y^2+x+2y+3=0,\ x^2+y^2+2x+4y+5=0,$
$x^2+y^2-7x-8y-9=0$

3 Show that the circles

$$x^2+y^2=1,\ x^2+y^2+2x=0,\ 2x^2+2y^2+6x+1=0$$

are such that the radical axes of them taken in pairs are identical, (*i.e.* the circles are co-axal).

4 Show that the circles belonging to each of following pairs touch each other.

(i) $x^2+y^2=2,\ x^2+y^2-6x-6y+10=0$

(ii) $x^2+y^2=25,\ 2x^2+2y^2-4x-3y=25$

(iii) $x^2+y^2-4x+6y+8=0,$
$x^2+y^2-10x-6y+14=0$

Find the point of contact in each case.

5 Show that each of the circles

$$x^2+y^2+4y-1=0,\ x^2+y^2+6x+y+8=0,$$
$$x^2+y^2-4x-4y-37=0$$

touches the other two.

6 If the two circles

$$x^2+y^2+2gx+2fy=0 \text{ and}$$
$$x^2+y^2+2g'x+2f'y=0$$

touch each other show that $f'g=fg'$.

3 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+2x=0$, $2x^2+2y^2+6x+1=0$ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವೆರಡನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೂಲಾಕ್ಷ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದರೂ ಅದು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದು (ಅಂದರೆ ವೃತ್ತಗಳು ಏಕಾಕ್ಷ ವೃತ್ತಗಳಾಗಿರುವುವು) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4 ಈ ಕೆಳಗಿನ ವೃತ್ತದ್ವಯಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವು ಮತ್ತೊಂದನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(i) $x^2+y^2=2$, $x^2+y^2-6x-6y+10=0$

(ii) $x^2+y^2=25$, $2x^2+2y^2-4x-3y=25$

(iii) $x^2+y^2-4x+6y+8=0$, $x^2+y^2-10x-6y+14=0$.

ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5 $x^2+y^2+4y-1=0$, $x^2+y^2+6x+y+8=0$, $x^2+y^2-4x-4y-37=0$ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ವೃತ್ತವು ಉಳಿದೆರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6 $x^2+y^2+2gx+2fy=0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2+2g'x+2f'y=0$ ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ $f'g=fg'$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

TRIGONOMETRY

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ

CHAPTER 7

7.1 Trigonometry—

The word 'trigonometry' means measurement of a triangle. In ancient days man had felt intuitively or otherwise that a certain relationship existed between the sides and angles of a triangle. In some of the special cases he was even able to calculate an unknown side or angle of a triangle. This process inevitably led him to the definition of certain functions of angles which are called the 'trigonometric functions'. To day the word '*trigonometry*' means the study of the properties of these trigonometric functions.

7.2 Rotation and Revolution—

If an object spins round itself like a top it is said to rotate. This motion is called *rotation.* If an object moves round another object, *e.g.*, a mile runner in a round track race, it is said to revolve. This motion is called *revolution.* We say the earth is rotating about itself and revolving round the Sun.

7.3 Direction of Revolution—

Consider a point P moving on the circumference of a circle of centre O. P can move in the direction either $PQRP$ or $PRQP$. Though the total effect when it revolves once round O is the same, the directions of revolution are different. In the first case P is revolving in the anti-clockwise direction and in the second case in the clockwise direction. It is customary to denote the former motion as positive and the latter as negative.

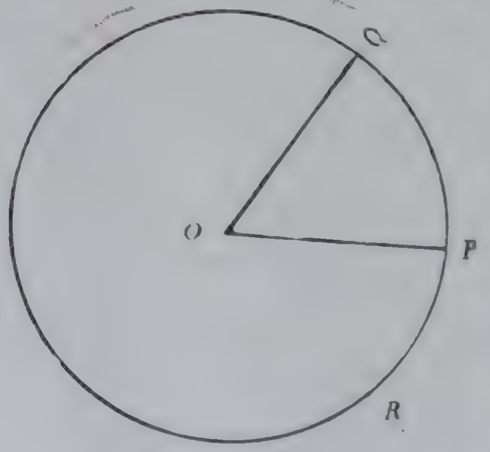


Fig. 7.1

ಅಧ್ಯಾಯ 7

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ

7.1 ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ

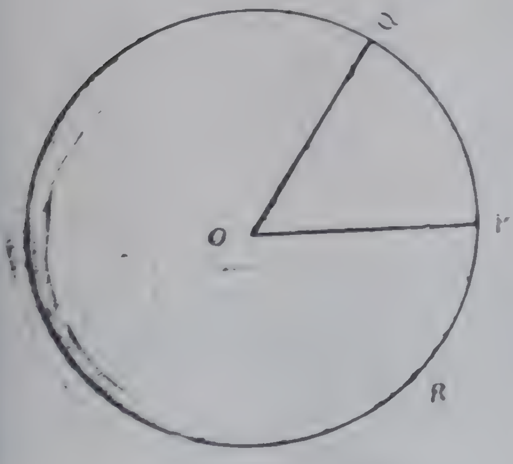
'ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ' ಪದದ ಅರ್ಥ ತ್ರಿಕೋಣದ ಅಳತೆ. ಪ್ರಾಚೀನಕಾಲದಲ್ಲಿ ಮನುಷ್ಯ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳಿಗೂ ಕೋಣಗಳಿಗೂ ಏನೋ ಒಂದು ಸಂಬಂಧ ವಿದೆಯೆಂದು ಅಂತರ್ಬೋಧೆಯಿಂದ ಅಥವಾ ಬೇರೆ ಕಾರಣದಿಂದ ಅರಿತಿದ್ದ. ಕೆಲವು ವಿಶೇಷ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಅವನು ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತ ಭುಜವನ್ನೋ ಕೋನವನ್ನೋ ಗಣನೆಯಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲೂ ಶಕ್ತನಾಗಿದ್ದ. ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿದಂತೆ ಕೋನಗಳ ಉತ್ಪನ್ನ ಫಲಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು ಅನಿವಾರ್ಯವಾಯಿತು. ಇವು ಗಳನ್ನು 'ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ ಫಲಗಳು' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ತ್ರಿಕೋಣ ಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ ಫಲಗಳ ಅಭ್ಯಾಸವೇ 'ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ'.

7.2 ಆವರ್ತನೆ ಮತ್ತು ಪರಿಭ್ರಮಣೆ

ಒಂದು ವಸ್ತು ಬುಗುರಿಯಂತೆ ತನ್ನ ಸುತ್ತಲೂ ಸುತ್ತುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದು ಆವರ್ತಿಸುತ್ತಿದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಚಲನೆಯ ಹೆಸರು ಆವರ್ತನೆ. ವರ್ತುಳಾಕಾರದ ಪಥದಲ್ಲಿ ಓಡುವ ಮೈಲು ಓಟಗಾರನಂತೆ ಒಂದು ವಸ್ತು ಇನ್ನೊಂದರ ಸುತ್ತಲೂ ಸುತ್ತು ತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದು ಪರಿಭ್ರಮಿಸುತ್ತಿದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಚಲನೆಯ ಹೆಸರು ಪರಿಭ್ರಮಣೆ. ಭೂಮಿಯು ತನ್ನ ಸುತ್ತಲೂ ಆವರ್ತಿಸುತ್ತಿದೆ ಮತ್ತು ಸೂರ್ಯನ ಸುತ್ತಲೂ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುತ್ತಿದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

7.3 ಪರಿಭ್ರಮಣೆಯ ದಿಶೆ

O ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ P ಎನ್ನುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. Pಯು $PQRP$ ಅಥವಾ $PRQP$ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಬಹುದು. ಅದು ಒಂದು ಸಲ O ಸುತ್ತಲೂ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿದಾಗ ಆಗುವ ಸಮಗ್ರ ಪರಿಣಾಮ ಒಂದೇ ಆದರೂ ಪರಿಭ್ರಮಣೆಯ ದಿಶೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಮೊದಲಿನ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ P ಯು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವುದು ; ಎರಡ ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿ ಭ್ರಮಿಸುವುದು. ಮೊದಲಿನ ಚಲನೆ ಯನ್ನು ಧನಾತ್ಮಕವೆಂದೂ ಎರಡನೆಯ ದನ್ನು ಋಣಾತ್ಮಕವೆಂದೂ ರೂಢಿಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ. 7.1

7.4 Angle generated by a revolving Straight Line— In the previous example let the straight line OP revolve from the position OP to the position OQ. In this process it is said to generate the angle POQ. It is measured by the amount of revolution of OP from OP to OQ. Thus a straight line revolving about a fixed point on it generates an angle at that point.

7.5 Let $X'OX$ be a fixed straight line in which O is a fixed point. Let a revolving straight line start from OX revolve about O in the positive direction and assume the positions OP, OQ, etc. The angles generated by it are XOP, XOQ, XOR, XOS (all measured in the positive sense). When the revolving line coincides with OX' the angle generated is 180° or a *straight angle.*

$$\angle XOX' = 180°$$

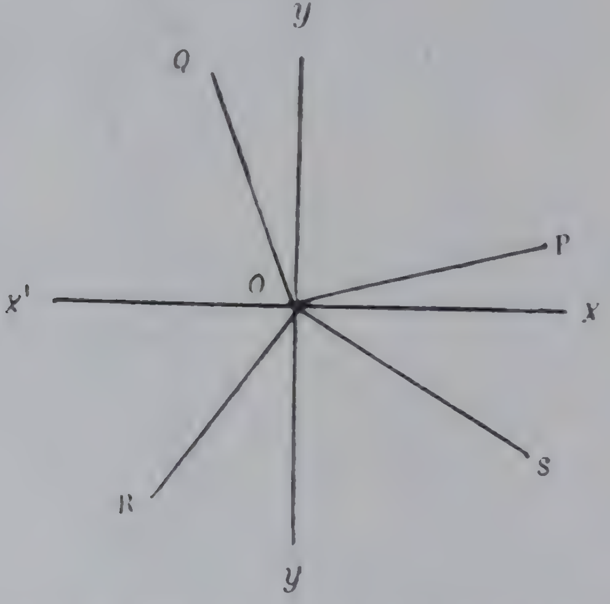


Fig. 7.2

When the line has revolved half this amount coming to the position OY it is said to have generated a *right angle.* One right angle is equal to 90°. When it coincides with OY' the angle generated is 270° or three right angles.

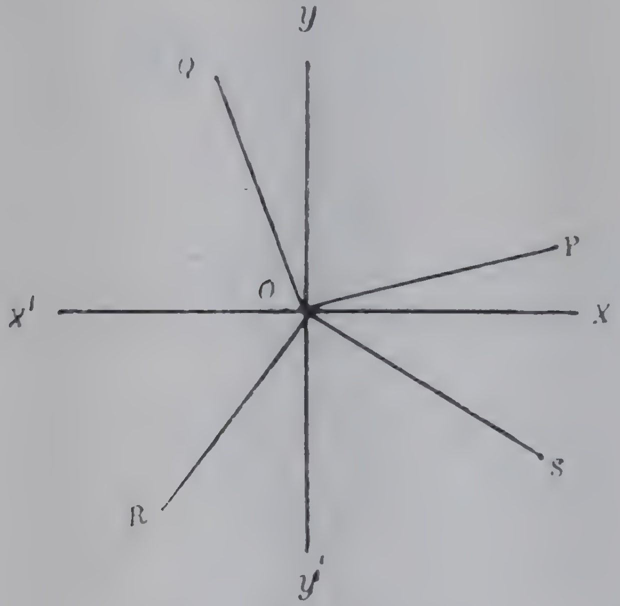
$$\angle XOY' = 270°$$

7.4 ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಪರಿಭ್ರಮಣೆಯಿಂದ ಜನಿಸುವ ಕೋನ

ಹಿಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ OP ಸರಳರೇಖೆಯು OP ಸ್ಥಾನದಿಂದ PQ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಲಿ. ಈ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಅದು PQR ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು OP ಯು OP ಸ್ಥಾನದಿಂದ OQ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿದೆ ಎಂಬುದರ ಮೂಲಕ ಅಳೆಯಲಾಗುವುದು. ಹೀಗೆ ತನ್ನ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತದೆ.

7.5 $X'OX$ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು O ಅದರ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಒಂದು ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆ OX ನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ O ಸುತ್ತಲೂ ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಲಿ ಮತ್ತು OP, OQ ಇತ್ಯಾದಿ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಲಿ. ಅದು ರಚಿಸುವ ಕೋನಗಳು XOP, XOQ, XOR XOS (ಎಲ್ಲವನ್ನೂ ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಅಳೆಯಬೇಕು). ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ಸರಳ ರೇಖೆ OX' ನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾದಾಗ ಅದು ರಚಿಸಿರುವ ಕೋನ $180°$ ಅಥವಾ ಒಂದು ಸರಳ ಕೋನ.

$$\angle XOX' = 180°$$



ಚಿತ್ರ 7.2

ಆ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಇದರ ಅರ್ಧಾಂಶ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ OY ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಬಂದಾಗ ಅದು ಒಂದು ಸಮಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಸಮಕೋನವು $90°$ ಗೆ ಸಮಾನ. ಸರಳರೇಖೆಯು OY' ನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾದಾಗ ಅದು ರಚಿಸಿರುವ ಕೋನ $270°$ ಅಥವಾ ಮೂರು ಸಮಕೋನಗಳು.

$$\angle XOY' = 270°$$

When the line returns to OX after one revolution the total angle generated by it about O is 360° or 4 right angles.

If the straight line revolves further it will be generating angles of the form $n.\,360^\circ + \phi^\circ$ where n is a positive integer. n indicates the number of revolutions and ϕ° is the angle measured to the present position of the revolving line from Ox in the positive direction. If n is negative we shall still reach the same position (OP) but after completing n complete revolutions in the negative direction. [Fig. 7.3 (2)]

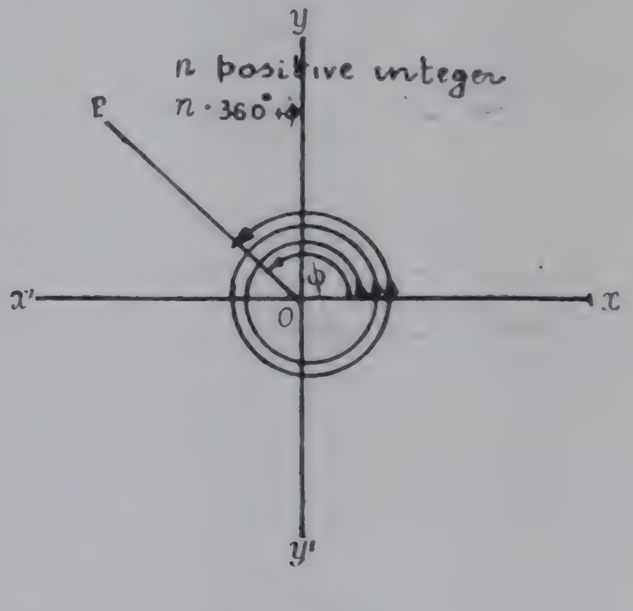
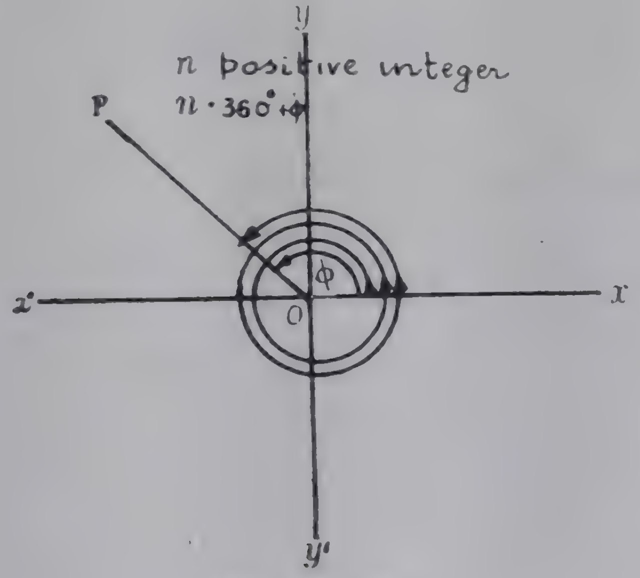


Fig. 7.3 (1)

ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಒಂದು ಪರಿಭ್ರಮಣೆಯನ್ನು ಮುಗಿಸಿ OX ಗೆ ಮರಳುವಾಗ ಅದು ಸಮಾಗ್ರವಾಗಿ 360° ಅಥವಾ ನಾಲ್ಕು ಸಮಕೋನಗಳನ್ನು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರುತ್ತವೆ.

ಆ ಸರಳರೇಖೆಯು ಮತ್ತೂ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿದರೆ ಅದು $n.360^\circ+\phi^\circ$ ಈ ರೂಪದ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ; ಇಲ್ಲಿ $n.360^\circ+\Phi^\circ$ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ. n ಪರಿಭ್ರಮಣೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ϕ° ಯು ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯು ಪ್ರಕೃತ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ OX ನಿಂದ ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗಿರುವ ಕೋನವನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. n ಋಣವಾದರೂ ನಾವು ಪುನಃ ಮೊದಲಿನ (OP) ಸ್ಥಾನವನ್ನೇ ತಲಪುತ್ತೇವೆ ; ಆದರೆ ಈ ಸಲ n ಪೂರ್ಣ ಪರಿಭ್ರಮಣೆಗಳನ್ನು ಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರ 7.3(2)]



ಚಿತ್ರ 7.3 (1)

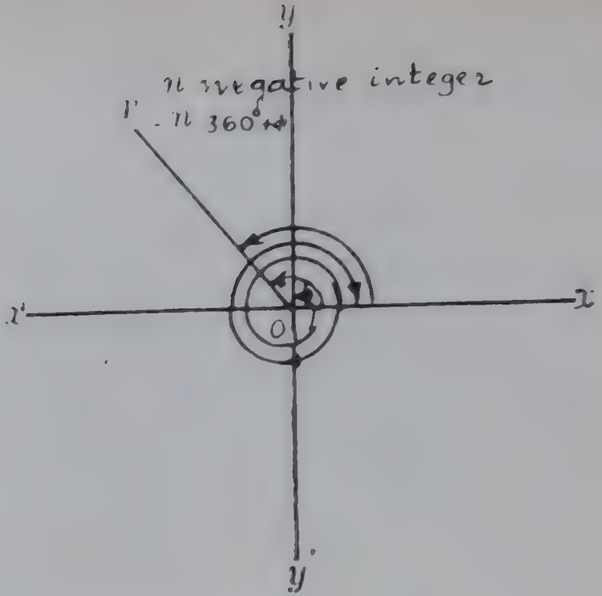


Fig. 7·3 (2)

7.6 Measurement of an Angle—

The height of a person can be measured in meters or feet or in any other convenient unit. Each system has its own purpose to achieve and may have its own special advantages. The angle generated by a revolving line about a fixed point on it in one complete revolution is divided into 360 equal parts and each part is called one *degree*. One degree is divided into 60 equal parts and each part is called one *minute* (of arc); and finally, one minute is divided into 60 equal parts and each part is called a *second* (of arc).

x degrees are written x°
y minutes are written y'
z seconds are written z''

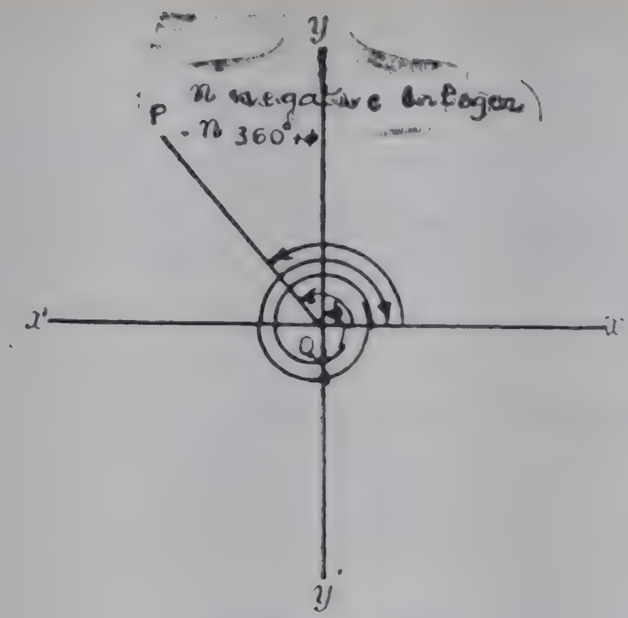


Fig. 7.3 (2)

7.6 ಕೋನಮಾನ

ಒಂದು ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಅಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಇನ್ನಾವುದಾದರೂ ಅನುಕೂಲವಾದ ಮಾನದಲ್ಲಿ ಅಳೆಯಬಹುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದ್ಧತಿಗೂ ಅದರದೇ ಆದ ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಗುರಿಸಾಧನೆ ಇದೆ ; ಆದುದರಿಂದ ಈ ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ವಿಶೇಷ ಸೌಕರ್ಯಗಳೂ ಇವೆ. ತನ್ನ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಪರಿಭ್ರಮಣೆಯಲ್ಲಿ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು 360 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಒಂದೊಂದು ಇಂಥ ಭಾಗವನ್ನೂ ಒಂದು ಡಿಗ್ರಿಯೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಡಿಗ್ರಿಯನ್ನು 60 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಇಂಥ ಭಾಗವನ್ನೂ ಒಂದು (ಕೋನದ) ಮಿನಿಟ್ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ; ಮತ್ತು ಕೊನೆಯದಾಗಿ ಒಂದು ಮಿನಿಟನ್ನು 60 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಇಂಥ ಭಾಗವನ್ನೂ ಒಂದು (ಕೋನದ) ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

x ಡಿಗ್ರಿಗಳನ್ನು x° ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

y ಮಿನಿಟುಗಳನ್ನು y' ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

z ಸೆಕೆಂಡುಗಳನ್ನು z'' ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

70° 15′ 44″ means 70 degrees, 15 minutes, 44 seconds.

7·7 The above system of measuring angles is termed the *sexagesimal system.* Another more convenient system for measuring angles is the radian system. It will be explained in paragraph 10.

7.8 Two important properties of a Circle—

Consider two concentric circles C_1 and C_2 of radii r_1 and r_2 respectively. Mark n equal arcs $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ..., $A_n A_1$ on C_1. Produce the radii OA_1, OA_2, ... OA_n to intersect the circle C_2 in the points B_1, B_2, ... B_n. Then $B_1 B_2$, $B_2 B_3$, .. $B_n B_1$ are equal arcs on the circle C_2. From the similar triangles $OA_1 A_2$ and $OB_1 B_2$ we have

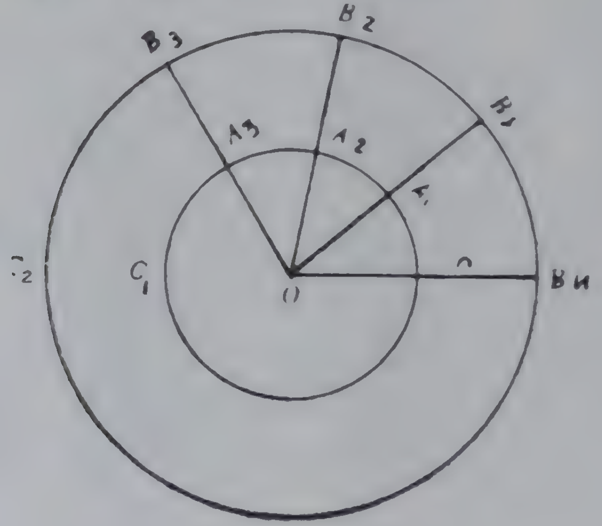


Fig. 7·4

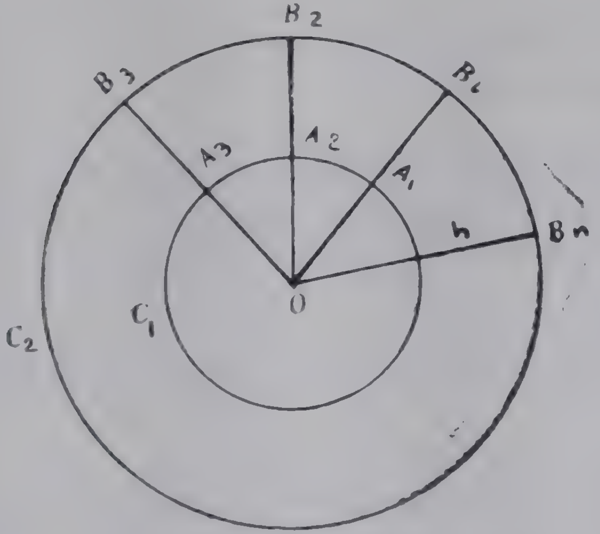
$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

70° 15′ 44″ ಎಂದರೆ 70 ಡಿಗ್ರಿಗಳು, 15 ಮಿನಿಟುಗಳು, 44 ಸೆಕೆಂಡುಗಳು ಎಂದರ್ಥ.

7.7 ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆಯುವ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಮವನ್ನು ಷಷ್ಟ್ಯಂಶ ಪದ್ಧತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಅನುಕೂಲವಾದ ಇನ್ನೊಂದು ಕ್ರಮದ ಹೆಸರು ರೇಡಿಯನ್ ಪದ್ಧತಿ. ಅದನ್ನು ಪರಿಚ್ಛೇದ 7.10 ರಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗುವುದು.

7·8 ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಮುಖ್ಯ ಗುಣಗಳು

r_1, r_2 ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿರುವ C_1 ಮತ್ತು C_2 ಎನ್ನುವ ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. C_1ರ ಮೇಲೆ $A_1 A_2$, $A_2 A_3$,...., $A_n A_1$ ಎನ್ನುವ n ಸಮಾನ ಕಂಸಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. OA_1, OA_2,...., OA_n ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು C_2 ವೃತ್ತವನ್ನು B_1, B_2,...., B_n ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ. ಆಗ B_1B_2, $B_2 B_3$,...., $B_n B_1$ ಇವು C_2 ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ n ಸಮಾನ ಕಂಸಗಳಾಗುವುವು. $OA_1 A_2$ ಮತ್ತು $OB_1 B_2$ ಎನ್ನುವ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಂದ



ಚಿತ್ರ 7.4

$$\frac{A_1 A_2}{B_1 B_2} = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{r_1}{r_2}$$, ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

$$\text{Similarly, } \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \ldots = \frac{A_nA_1}{B_nB_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\therefore \frac{r_1}{r_2} = \frac{A_1A_2+A_2A_3+\ldots+A_nA_1}{B_1B_2+B_2B_2+\ldots+B_nB_1}$$

$$= \frac{\text{perimeter of the polygon } A_1A_2\ldots A_n}{\text{perimeter of the polygon } B_1B_2\ldots B_n}$$

Let us now choose the successive points $A_1, A_2, \ldots A_n$ as close to one another as possible. In the limit when the number of points tends to infinity the polygon $A_1 A_2 \ldots A_n$ becomes the circle C_1 and the polygon $B_1 B_2 \ldots B_n$ the circle C_2.

$$\therefore \frac{r_1}{r_2} = \frac{\text{circumference of } C_1}{\text{circumference of } C_2}$$

$\therefore$ circumference of $C_1 \propto r_1$
circumference of $C_2 \propto r_2$

Hence the *ratio of the circumference of a circle to its diameter is a constant, the same for all circles.* This constant is denoted by the Greek letter π.

$\therefore$ The circumference of a circle of radius r is equal to πd or $2\pi r$ where d is the diameter.

π is an irrational number. Its value cannot be expressed as a fraction, but approximate values can be given. The Greek mathematician Archimedes gave the approximate value $\pi = \frac{22}{7}$. A more accurate value $\pi = 3.1416$ was given by the Indian mathematician Arya Bhata (499 *A.D*). To eight decimal places

$$\pi = 3.14159265$$

ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ—

$$\frac{A_1 A_2}{B_1 B_2} = \frac{A_2 A_3}{B_2 B_3} = \ldots\ldots = \frac{A_n A_1}{B_n B_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\therefore \frac{r_1}{r_2} = \frac{A_1 A_2 + A_2 A_3 + \ldots + A_n A_1}{B_1 B_2 + B_2 B_3 + \ldots + B_n B_1}$$

$$= \frac{A_1 A_2 \ldots A_n \text{ ಬಹುಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ}}{B_1 B_2 \ldots B_n \text{ ಬಹುಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ}}$$

ಈಗ, ಒಂದಾದನಂತರ ಇನ್ನೊಂದು ಬರುವ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಆದಷ್ಟು ಸಮೀಪವಿರುವಂತೆ ಆರಿಸೋಣ. ಬಿಂದುಗಳ ಪರಮಾವಧಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಅನಂತಕ್ಕೆ ಏರಿದಾಗ $A_1 A_2 \ldots A_n$ ಬಹುಭುಜವು C_1 ವೃತ್ತವಾಗುವುದು ಮತ್ತು $B_1 B_2 \ldots B_n$ ಬಹುಭುಜವು C_2 ವೃತ್ತವಾಗುವುದು.

$$\therefore \frac{r_1}{r_2} = \frac{C_1 \text{ ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ}}{C_2 \text{ ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ}}$$

$\therefore$ C_1 ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ $\propto r_1$

C_2 ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ $\propto r_2$

ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸಗಳ ಪ್ರಮಾಣವು ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ ; ಇದು ಎಲ್ಲ ವೃತ್ತಗಳಿಗೂ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. ಈ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು π ಎನ್ನುವ ಗ್ರೀಕ್ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ r ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ πd ಅಥವಾ $2\pi r$ (dಯು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ) ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

π ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಒಂದು ಭಿನ್ನ ರಾಶಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ; ಆದರೆ ಸಮೀಪದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು. ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಜ್ಞ, ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸನು πಯ ಸ್ಥೂಲಬೆಲೆ $\frac{22}{7}$ ಆಗುವುದೆಂದು ಹೇಳಿದನು. ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞ ಆರ್ಯಭಟ್ಟ (499 ಕ್ರಿ. ಶ.) ನೀಡಿದ ಬೆಲೆ $\pi = 3.1416$ ಇದು ಇನ್ನಷ್ಟು ಸಮೀಪವಾಗಿದೆ; ದಶಮಾಂಶದ ಎಂಟು ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ π ಬೆಲೆ 3.14159265 ಆಗಿರುವುದು.

7.9 In the adjoining circle C

$A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ... $A_n A_1$ are n equal chords. It is clear that

$O A_1 A_2$, $O A_2 A_3$ . . . $O A_n A_1$ are n equal triangles in the circle. If λ be the length of the altitude of any one of them, we have

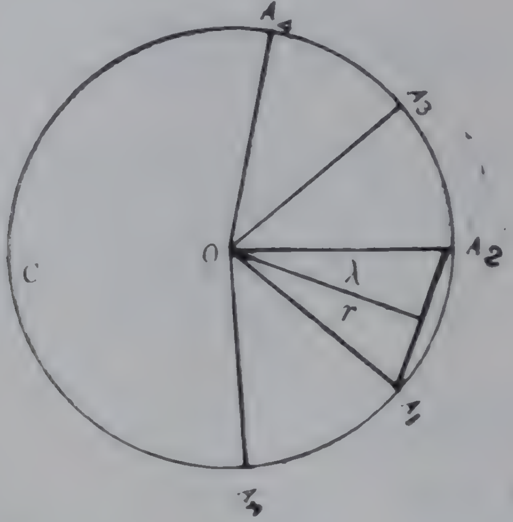


Fig. 7 5

$$\Delta\, O A_1 A_2 = \tfrac{1}{2}\, A_1 A_2 \cdot \lambda$$
$$\Delta\, O A_2 A_3 = \tfrac{1}{2}\, A_2 A_3 \cdot \lambda$$
$$\Delta\, O A_n A_1 = \tfrac{1}{2}\, A_n A_1 \cdot \lambda$$

Adding—

$$\therefore\ \Sigma\, \Delta O\, A_1 A_2 = \tfrac{1}{2}\, \lambda\, \Sigma\, A_1\, A_2,$$

$\therefore$ Area of the polygon $A_1 A_2$ . . . . A_n

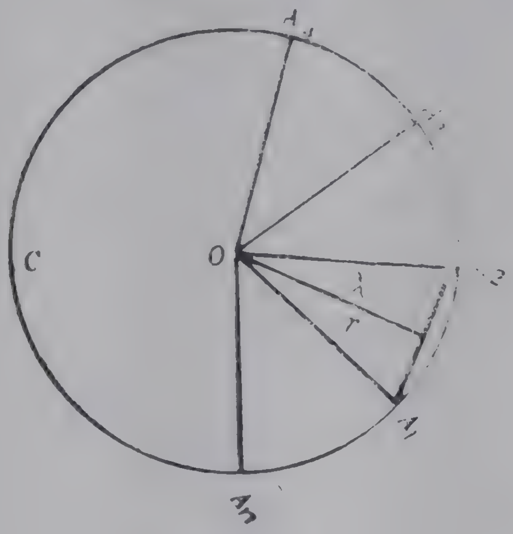
$= \frac{1}{2}\lambda$[perimeter of the polygon $A_1 A_2$ . . . . A_n]

Now increase the number of chords indefinitely. In the limit the polygon $A_1 A_2$ . . . A_n coincides with the circle C and λ becomes the radius r of the same circle.

$\therefore$ Area of the circle, $C = \dfrac{r}{2}$ [circumference of the circle, C]

$$= \frac{r}{2} \cdot\ 2\pi r = \pi r^2$$

7.9 ಇದರೊಂದಿಗಿರುವ C ಎನ್ನುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ $A_1 A_2$, $A_2 A_3$,.... $A_n A_1$ ಇವು n ಸಮಾನ ಜ್ಯಾಗಳು. ಆದುದರಿಂದ OA_1A_2, OA_2A_3,... .... OA_nA_1 ಇವು ವೃತ್ತದೊಳಗಿರುವ n ಸಮಾನ ತ್ರಿಭುಜಗಳೆನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. λ ಎನ್ನುವುದು ಇಂತಹ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಲಂಬೋನ್ನತಿಯಾಗಿದ್ದರೆ,



ಚಿತ್ರ 7.5

$$\triangle\ OA_1A_2 = \tfrac{1}{2} \cdot A_1\ A_2 \cdot \lambda$$
$$\triangle\ OA_2A_3 = \tfrac{1}{2}\ A_2\ A_3 \cdot \lambda$$
$$\triangle\ OA_nA_1 = \tfrac{1}{2} \cdot A_n\ A_1 \cdot \lambda$$

ಕೂಡಿಸಿದರೆ $\Sigma \triangle OA_1A_2 = \frac{1}{2} \cdot \lambda\ \Sigma_1 A_1 A_2$

$\therefore\ A_1A_2........A_n$ ಬಹುಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

$= \frac{1}{2} \cdot \lambda$ [$A_1A_2....A_n$ ಬಹುಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ]

ಈಗ ಜ್ಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಿತಿಯಿಲ್ಲದಂತೆ ಏರಿಸಿ.' ಪರಮಾವಧಿ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ $A_1A_2....A_n$ ಬಹುಭುಜವು C ವೃತ್ತದೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದು ; ಮತ್ತು λ ಅದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆಗುವುದು.

$\therefore$ C ವೃತ್ತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= \dfrac{r}{2}$ [C ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ]

$$= \frac{r}{2} \cdot\ 2\pi r\ = \pi r^2$$

7.10 Radian—

In the adjoining circle an arc AC is taken equal to the radius r of the circle. Then the value of the angle AOC is called one radian. *A radian is the angle subtended at the centre of a circle by an arc whose length is equal to the radius of the circle.* This definition implies that the radian is independent of the size of the circle.

7·11 We know that in a circle the arcs are proportional to the angle they subtend at the centre and *vice versa*. Hence in the figure no. 7.6 we have

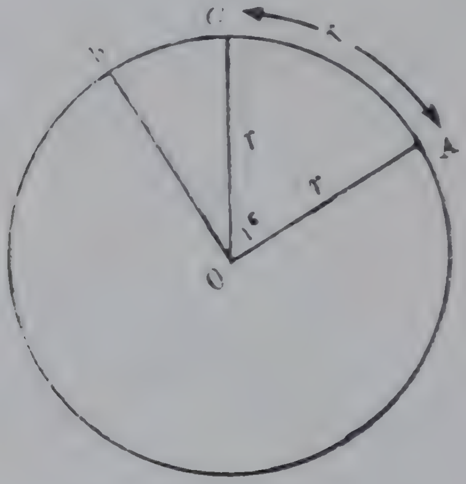


Fig. 7.6

$$\frac{\angle AOC}{\angle AOB} = \frac{\text{arc } AC}{\text{arc } AB} = \frac{r}{\frac{1}{4}\,[\text{circumference of the circle}]}$$

$$= \frac{4r}{2\pi r} = \frac{2}{\pi}$$

$$\therefore \quad 1 \text{ radian} = \angle AOC = \frac{2}{\pi} .\ \angle AOB$$

$$= \frac{2}{\pi} \text{ of a right angle}$$

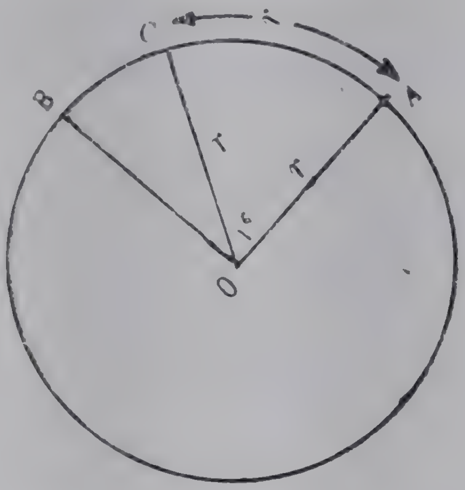
$$= \text{constant}$$

The radian is therefore a constant angle.

7·10 ರೇಡಿಯನ್

ಇದರೊಂದಿಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವಂತೆ AC ಕಂಸವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ. AOC ಕೋನವನ್ನು ಒಂದು ರೇಡಿಯನ್ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದಷ್ಟೇ ಉದ್ದವಿರುವ ಅದರ ಕಂಸವು ಆ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವ ಕೋನವು ಒಂದು ರೇಡಿಯನ್. ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ ರೇಡಿಯನ್‌ನ ಬೆಲೆ ವೃತ್ತದ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿಲ್ಲ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

7·11 ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಕಂಸಗಳು ಅವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವ ಕೋನಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿವೆಯೆಂದೂ ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ 7.6ರ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ



ಚಿತ್ರ 7.6

$$\frac{\angle AOC}{\angle AOB} = \frac{\text{ಕಂಸ } AC}{\text{ಕಂಸ } AB} = \frac{r}{\frac{1}{4}\,[\text{ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ}]}$$

$$= \frac{4r}{2\pi r} = \frac{2}{\pi}$$

$$\therefore\ 1 \text{ ರೇಡಿಯನ್} = \angle AOC = \frac{2}{\pi}\cdot \quad \angle AOB$$

$$= \text{ಒಂದು ಸಮಕೋನದ } \frac{2}{\pi}\text{ನೇ ಅಂಶ}$$

$$= \text{ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ}$$

ಆದುದರಿಂದ ರೇಡಿಯನ್ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಕೋನವಾಗಿದೆ.

7·12 A radian is usually written as 1^c. Its value is given by

$$1^c = \frac{2}{\pi} \times 90^\circ = 57^\circ\ 17'\ 45'' \text{ (approximately)}$$

Again, $1^c = \frac{2}{\pi} . 90^\circ$

$\therefore\ \pi^c = 180^\circ$

π *radians are equal to* 180°

This gives a relation between the sexagesimal and the radian (or circular, as it is called) system of measuring an angle.

7.13 Length of an arc of a Circle—

Let an arc AP of a circle subtend an angle ϕ^c at the centre. If the length of the arc be l.

$$\frac{\text{arc } AP}{\text{arc } AC} = \frac{\angle AOP}{\angle AOC}$$

$$\therefore\ \frac{l}{r} = \phi$$

$$\therefore\ l = r\phi$$

Note that ϕ should be measured in radians.

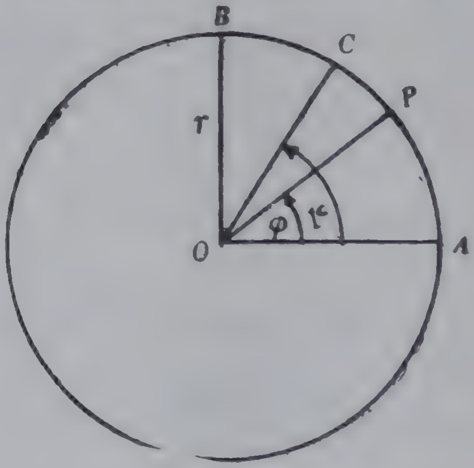


Fig.7.7

7·12 ಒಂದು ರೇಡಿಯನ್‌ನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ 1^c ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದರ ಬೆಲೆ

$$1^c = \frac{2}{\pi} \times 90^\circ = 57^\circ 17' 45''$$ (ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ)

ಪುನಃ, $$1^c = \frac{2}{\pi} \times 90^\circ$$

$$\therefore \quad \pi^c = 180^\circ$$

π ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳು 180°ಗೆ ಸಮವಾಗಿವೆ.

ಈ ಹೇಳಿಕೆ, ಷಷ್ಟ್ಯಂಶ ಮತ್ತು ರೇಡಿಯನ್ (ಅಥವಾ ವರ್ತುಳೀಯವೆಂದೂ ಹೇಳುವುದಿದೆ) ಮಾನಗಳಿಂದ ಕೋನವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನಗಳಿಗೆ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ ನೀಡುವುದು.

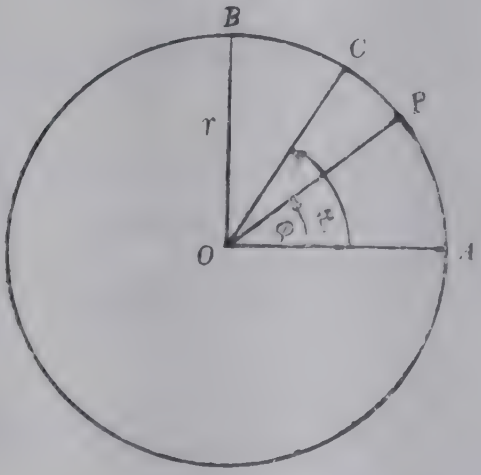
7·13 ವೃತ್ತ ಕಂಸದ ಉದ್ದ

AP ಎನ್ನುವ ಒಂದು ವೃತ್ತಕಂಸ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ Φ^c ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಿ. ಕಂಸದ ಉದ್ದ l ಎಂದಿದ್ದರೆ,

$$\frac{AP \text{ ಕಂಸ}}{AC \text{ ಕಂಸ}} = \frac{\angle AOP}{\angle AOC}$$

$$\therefore \quad \frac{l}{r} = \frac{\Phi}{1}$$

$$\therefore \quad l = r\Phi$$



ಚಿತ್ರ 7.7

7·14 Area of a Sector of a Circle—

Let the area of the sector AOP (angle θ^c) b
Then, since in a circle the areas of the sectors ar
proportional to the angles subtended by them at th
centre, we have

$$\frac{\text{sector } AOP}{\text{quadrant } AOB} = \frac{\theta}{\frac{\pi}{2}}$$

Area of sector AOP, $S = \frac{2\theta}{\pi} \cdot \frac{\pi r^2}{4} = \frac{1}{2} r^2 \theta$

Note that θ should be measured in radians.

Exercises 7.1

1 Express the following angles as fractions of π—

(a) 15°, (b) 22° 30′ (c) 45°, (d) 75°, (e) 97° 30
(f) 150°, (g) 210°, (h) 300°, (i) 390°, (j) 420
(k) 442° 30′, (l) 637° 30′.

2 Convert the following angles into radia
$\pi = 3.1416$)—

(a) 25° 50′, (b) 37° 30′, (c) 82° 30′, (d) 68° 45
(e) 157° 30′, (f) 247° 30′.

3 Convert the following radians into sexagesim
measure—

(a) $\frac{3\pi}{4}$, (b) $\frac{7\pi}{45}$, (c) $\frac{5\pi}{27}$, (d) $\frac{5\pi}{24}$, (e) $\frac{\pi}{5}$,
(f) $\frac{3\pi}{7}$, (g) $\frac{2\pi}{19}$, (h) $\frac{17\pi}{12}$.

7·14 θವನ್ನು ರೇಡಿಯನ್‌ನಲ್ಲಿಯೇ ಅಳತೆಮಾಡಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

ಒಂದು ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

ವೃತ್ತಖಂಡ AOP (ಕೋನ θ) ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ S ಎಂದಿರಲಿ. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವೃತ್ತಖಂಡಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ಆ ವೃತ್ತ ಖಂಡಗಳು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವ ಕೋನಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ,

$$\frac{AOP \text{ ವೃತ್ತಖಂಡ}}{AOP \text{ ಪಾದ}} = \frac{\theta}{\frac{\pi}{2}}$$

$\therefore$ ವೃತ್ತಖಂಡ AOP ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ, $S = \frac{2\,\theta}{\pi} \quad \frac{\pi r^2}{4}$

$$= \tfrac{1}{2} r^2 \theta$$

θ ವನ್ನು ರೇಡಿಯನ್‌ನಲ್ಲಿಯೇ ಅಳತೆಮಾಡಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 7·1

1 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು π ಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ—

(a) $15°$, (b) $22° \, 30'$, (c) $45°$, (d) $75°$,
(e) $97° \, 30'$, (f) $150°$, (g) $210°$, (h) $300°$.
(i) $390°$, (j) $420°$, (k) $442° \, 30'$, (l) $637° \, 30'$,

2 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು ರೇಡಿಯನ್‌ಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ—($\pi = 3·1416$)

(a) $25° \, 50'$, (b) $37° \, 30'$, (c) $82° \, 30'$
(d) $68° \, 45'$, (e) $157° \, 30'$, (f) $247° \, 30'$

3 ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳನ್ನು ಷಷ್ಟ್ಯಂಶ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ—

(a) $\frac{3\pi}{4}$, (b) $\frac{7\pi}{45}$, (c) $\frac{5\pi}{27}$,
(d) $\frac{5\pi}{24}$, (e) $\frac{\pi}{5}$, (f) $\frac{3\pi}{7}$,
(g) $\frac{2\pi}{19}$, (h) $\frac{17\pi}{12}$

4 A pendulum 20 feet long swings through an angle 15. Find the length of the arc traced out by its extremity. Find also the area of the sector described by the pendulum.

5 The perimeter of a sector of a circle is equal to one-half the circumference of the circle. Find the angle of the sector in radians and in degrees.

6 Find the radius of a globe such that the distance measured along its surface between two points on the same meridian whose latitudes differ by $1^\circ\ 10'$ may be 1 inch.

7 A wheel of radius 3 feet rotates 10 times per 1 second. What is the length of the arc described by a point on its circumference in 5 seconds?

8 The three angles of a triangle are x°, y° and z^c Prore that

$$x+y=180\left[1-\frac{z}{\pi}\right]$$

9 A train moving on a circular track of radius one mile turns through 7° in 11 seconds. What is its speed in miles per hour?

10 What is the area of a sector radius r and length of the arc l?

7.15 Trigonometric Ratios—

Consider a rectangular co-ordinate system Ox, Oy. Take any point $P(x, y)$ in its plane. Let $OP=r$. Let $\angle xOP$ measured in the positive sense be θ. Draw PM perpendicular to the x-axis. PM is called the opposite and OM the adjacent side for the angle θ. OP is the hypotenuse of the right angled triangle OMP. The usual signs to the sigments OM $(=x)$ and MP $(=y)$ and MP $(=y)$ are assigned. OP the hypotenuse is always considered to be positive. The trigonometric ratios of θ are defined as follows :

4 20 ಅಡಿ ಉದ್ದವ ಒಂದು ಲೋಲಕವು 15° ಯಷ್ಟು ದೂರಕ್ಕೆ ಉಯ್ಯಾಲಾಡುವುದು. ಅದರ ಕೊನೆಯು ರಚಿಸುವ ಕಂಸದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಲೋಲಕವು ರಚಿಸುವ ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5 ಒಂದು ವೃತ್ತಖಂಡದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಆ ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕೋನವನ್ನು ರೇಡಿಯನ್‌ನಲ್ಲಿಯೂ ಡಿಗ್ರಿಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6 ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲಿನ ಒಂದೇ ಮಧ್ಯಾಹ್ನ ರೇಖೆಯ (ರೇಖಾಂಶದ) ಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ದೂರ 1 ಇಂಚು ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಅಕ್ಷಾಂಶಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 1° 10′ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

7 3 ಅಡಿ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಚಕ್ರವು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 10 ಸಲ ಆವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ. ಅದರ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು 5 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ಕಂಸದ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?

8 ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳು x^c, y^c ಮತ್ತು z^c.

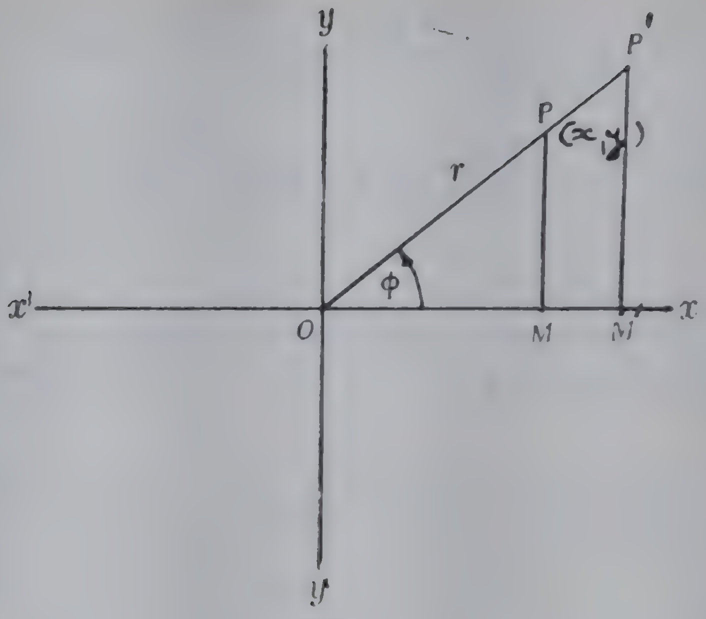
$x+y = 180\left[1-\frac{z}{\pi}\right]$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9 ಒಂದು ಮೈಲು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಓಡುತ್ತಿರುವ ರೈಲು ಬಂಡಿ 11 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ 7° ಯಷ್ಟು ತಿರುಗಿರುತ್ತದೆ. ರೈಲು ಬಂಡಿಯ ವೇಗ ಗಂಟೆಗೆಷ್ಟು ಮೈಲು?

10 ತ್ರಿಜ್ಯ r ಮತ್ತು ಕಂಸದ ಉದ್ದ l ಇರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವೆಷ್ಟು?

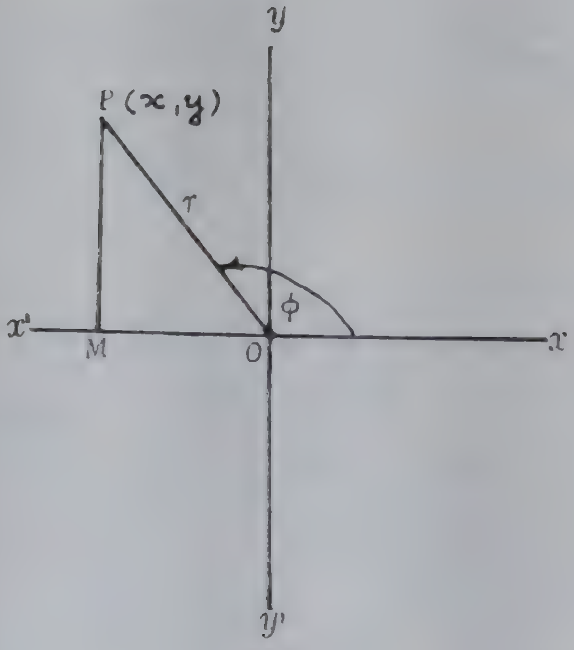
7.15 ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

OX, OY ಎನ್ನುವ ಲಂಬನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಒಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಅದರ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ $P(x, y)$ ಎನ್ನುವ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. $OP = r$ ಎಂದಿರಲಿ. ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ (ಧನಾತ್ಮಕ) ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ XOP ಕೋನದ ಬೆಲೆ θ ಎಂದಿರಲಿ. PMನ್ನು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. θ ಎಂಬ ಕೋನಕ್ಕೆ PMನ್ನು ಎದುರಿನ ಭುಜವೆಂದೂ OMನ್ನು ಪಕ್ಕದ ಭುಜವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. OPಯು OMP ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣ. $OM(=x)$, $MP(=y)$ಗಳು (ಲಂಬ) ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ ವಾಡಿಕೆಯ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಓದೆ ಬರೆಯಬೇಕು. OPಯು (ಕರ್ಣವು) ಸದಾ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಸರಿಸುತ್ತೇವೆ,



(1)

ਚਿਤ੍ਰ, 7·8

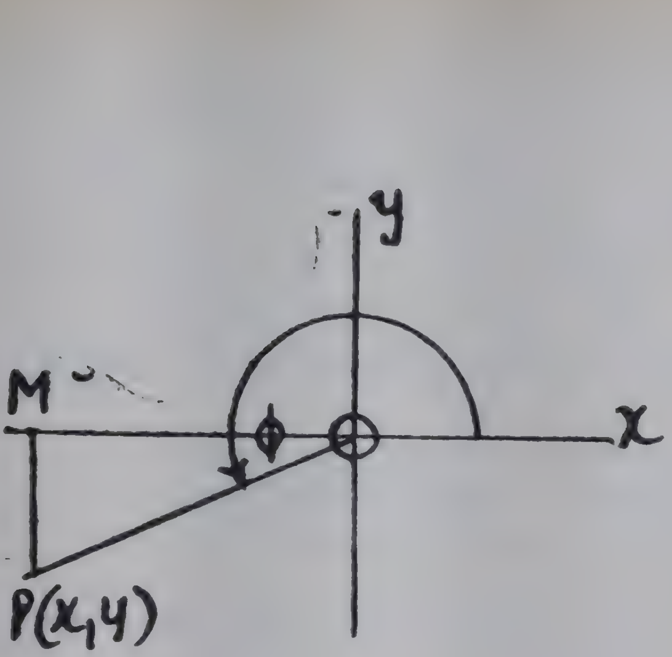


(2)

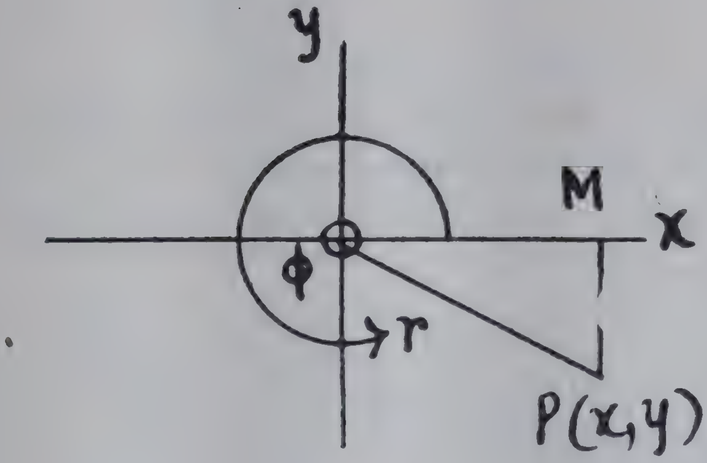
$$\frac{MP}{OP} = \frac{y}{r}$$

$$= \frac{\text{opposite side}}{\text{hypotenuse.}}$$

= sine Φ or simply sin Φ.



ಚಿತ್ರ 7·8 (3)



ಚಿತ್ರ 7·8 (4)

$\frac{MP}{OP} = \frac{y}{r} = \frac{\text{ಎದುರು ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}} = \text{sine}\ \Phi$ ಅಥವಾ ಸುಲಭವಾಗಿ $\sin \Phi$

$$\frac{OM}{OP} = \frac{x}{r} = \frac{\text{adjacent side}}{\text{hypotenuse}}$$

$$= \text{cosine } \Phi \text{ or simply } \cos\Phi$$

$$\frac{MP}{OM} = \frac{y}{x} = \frac{\text{Opp. side}}{\text{adj. side}}$$

$$= \text{tangent } \Phi \text{ or simply } \tan \Phi$$

$$\frac{OM}{MP} = \frac{x}{y} = \frac{\text{adj. side}}{\text{opp. side}}$$

$$= \text{cotangent } \Phi \text{ or simply } \cot \Phi$$

$$\frac{OP}{OM} = \frac{r}{x} = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{adj. side}}$$

$$= \text{secant } \Phi \text{ or simply } \sec \Phi$$

$$\frac{OP}{MP} = \frac{r}{y} = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{opp. side}}$$

$$= \text{cosecant } \Phi \text{ or simply } \operatorname{cosec} \Phi$$

7.16 From the definition the following propertie of the trigonometric ratios follow—

(i) For a given angle Φ its trigonomitric ratio are constant.

For, take any other point P' on OP (see fig 1) and draw $L'\ M'$ perpendicular to the x-axis. Then from the properties of the similar triangles it is clear that

$$\frac{M'P'}{OP'} = \frac{MP}{OP} = \sin\ \Phi$$

$$\frac{OM'}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos \Phi, \text{ etc.}$$

$$\frac{OM}{OP}=\frac{x}{r}=\frac{\text{ಪಕ್ಕದ ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}}=\text{cosine}\,\phi \text{ ಅಥವಾ ಸುಲಭವಾಗಿ } \cos\phi$$

$$\frac{MP}{OM}=\frac{y}{x}=\frac{\text{ಎ. ಭುಜ}}{\text{ಪ. ಭುಜ}}=\text{tangent}\,\phi \text{ ಅಥವಾ ಸುಲಭವಾಗಿ } \tan\phi$$

$$\frac{OM}{MP}=\frac{x}{y}=\frac{\text{ಪ. ಭುಜ}}{\text{ಎ. ಭುಜ}}=\text{cotangent}\,\phi \text{ ಅಥವಾ ಸುಲಭವಾಗಿ } \cot\phi$$

$$\frac{OP}{OM}=\frac{r}{x}=\frac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಪ. ಭುಜ}}=\text{secant}\,\phi \text{ ಅಥವಾ ಸುಲಭವಾಗಿ } \sec\phi$$

$$\frac{OP}{MP}=\frac{r}{y}=\frac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಎ. ಭುಜ}}=\text{cosecant}\,\phi \text{ ಅಥವಾ ಸುಲಭವಾಗಿ } \operatorname{cosec}\phi$$

7.16 ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ--

(i) ಒಂದು ಗೊತ್ತಾದ ಕೋನ ϕ ಎಂಬುದರ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ, OPಯ ಮೇಲೆ P' ಎನ್ನುವ ಬೇರೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. (ಚಿತ್ರ 1 ನೋಡಿ) $P'M'$ ನ್ನು x- ಅಕ್ಷಕ್ಕ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಆಗ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋಣಗಳ ಗುಣಗಳಿಂದ,

$$\frac{M'P'}{OP'}=\frac{MP}{OP}=\sin\phi$$

$$\frac{OM'}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos\phi \text{ ಇತ್ಯಾದಿ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿವೆ.}$$

$$\text{(ii)} \tan \Phi = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin \Phi}{\cos \Phi}$$

$$\cot \Phi = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos\Phi}{\sin\Phi}$$

$$\sec \Phi = \frac{r}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{r} = \frac{1}{\cos \Phi}$$

$$\operatorname{cosec} \Phi = \frac{r}{y} = \frac{\frac{1}{y}}{r} = \frac{1}{\sin \Phi}$$

$$\text{(iii)} \; OM^2 + MP^2 = OP^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

$$(\cos \Phi)^2 + (\sin \Phi)^2 = 1$$

It is customary to write $(\cos\Phi)^2$ as $\cos^2 \Phi$, $(\sin \Phi)^2$ as $\sin^2\Phi$ and so on.

$$\therefore \quad \underline{\cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi = 1} \qquad (7.1)$$

Dividing throughout by $\cos^2\Phi$ and $\sin^2\Phi$ in turn, we get

$$\underline{1 + \tan^2 \Phi = \sec^2 \Phi} \qquad (7.2)$$

$$\cot^2 \Phi + 1 = \operatorname{cosec}^2 \Phi \qquad (7.3)$$

These three relations are true for *all* values of Φ They are therefore called the three fundamental identities of trigonometry. If one of them is remembered the remaining two can be easily deduced.

$$\text{(ii)}\ \tan\Phi = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{r}{x}} = \frac{\sin\Phi}{\cos\Phi}$$

$$\cot\Phi = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\Phi}{\sin\Phi}$$

$$\sec\Phi = \frac{r}{x} = \frac{1}{\frac{x}{r}} = \frac{1}{\cos\Phi}$$

$$\operatorname{cosec}\Phi = \frac{r}{y} = \frac{1}{\frac{y}{r}} = \frac{1}{\sin\Phi}$$

$$\text{(iii)}\ OM^2 + MP^2 = OP^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

$$(\cos\Phi)^2 + (\sin\Phi)^2 = 1$$

$(\cos\Phi)^2$ ನ್ನು $\cos^2\Phi$ ಎಂದೂ $(\sin\Phi)^2$ ನ್ನು $\sin^2\Phi$ ಎಂದೂ ಮುಂತಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು ವಾಡಿಕೆ.

$$\therefore\quad \cos^2\Phi + \sin^2\Phi = 1 \quad \ldots\ldots \quad 7.1$$

$\cos^2\Phi$ ಮತ್ತು $\sin^2\Phi$ ಇವುಗಳಿಂದ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ $1 + \tan^2\Phi = \sec^2\Phi$ 7.2

$\cot^2\Phi + 1 = \operatorname{cosec}^2\Phi$ 7.3

ಇವು ದೊರೆಯುವುವು. Φ ಕೋನದ ಸಕಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಈ ಮೂರು ಸಂಬಂಧಗಳು ಸತ್ಯವಾಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂರು ಮೂಲ ಸತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಜ್ಞಾಪಕದಲ್ಲಿಟ್ಟು ಕೊಂಡರೆ ಉಳಿದೆರಡನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

Exercises 7.2

1 Prove the following identities—

(i) $\cos\theta \sec\theta \tan\theta = 1$

(ii) $(\sec^2 A - 1)\cot^2 A = 1$

(iii) $\cos A\sqrt{\cot^2 A + 1} = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1}$

(iv) $\dfrac{\sec A}{\cos A} - \dfrac{\tan A}{\cot A} = 1$

(v) $\tan^2\theta - \cot^2\theta = \sec^2\theta - \operatorname{cosec}^2\theta$

2 Show that—

(i) $\dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \cdot \dfrac{1+\cot^2\alpha}{\cot^2\alpha} \quad \sin^2\alpha \sec^2\alpha$

(ii) $\cot^2\theta . \dfrac{\sec\theta - 1}{1+\sec\theta} + \sec^2\theta . \dfrac{\sin\theta - 1}{1+\sin\theta} = 0$

(iii) $(\sec^2\alpha + \tan^2\alpha)(\operatorname{cosec}^2\alpha + \cot^2\alpha)$
$= 1 + 2\sec^2\alpha \operatorname{cosec}^2\alpha$

(iv) $(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2$
$+ (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 = 1$

(v) $\sec^2\alpha\tan^2\beta - \tan^2\alpha\sec^2\beta = \tan^2\beta - \tan^2\alpha$

3 If
$x = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$
$y = \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$
$z = \cos\alpha\sin\beta$
$t = \sin\alpha$

Show that $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 7·2

1 ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

(i) $\cos\theta \ \sec\theta \ \tan\theta = 1$

(ii) $(\sec^2 A - 1)\cot^2 A = 1$

(iii) $\cos A\sqrt{\cot^2 A + 1} = \sqrt{\mathrm{cosec}^2 A - 1}$

(iv) $\dfrac{\sec A}{\cos A} - \dfrac{\tan A}{\cot A} = 1$

(v) $\tan^2\theta - \cot^2\theta = \sec^2\theta - \mathrm{cosec}^2\theta$

2 ಇವನ್ನು ಸರಿಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ —

(i) $\dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \times \dfrac{1+\cot^2\alpha}{\cot^2\alpha} = \sin^2\alpha \ \sec^2\alpha$

(ii) $\cot^2\theta \ \dfrac{\sec\theta - 1}{1+\sin\theta} +$

$\sec^2\theta \ \dfrac{\sin\theta - 1}{1+\sec\theta} = 0$

(iii) $(\sec^2\alpha + \tan^2\alpha)\ (\mathrm{cosec}^2\alpha + \cot^2\alpha)$
$= 1 + 2\sec^2\alpha \ \mathrm{cosee}^2\alpha$

(iv) $(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2$
$+ (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 = 1$

(v) $\sec^2\alpha\tan^2\beta - \tan^2\alpha\sec^2\beta = \tan^3\beta - \tan^2\alpha$

3 $x = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$y = \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$

$z = \cos\alpha\sin\beta$

$t = \sin\alpha$ ಎಂದಾದರೆ

$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

4 Show that

$$3(\sin x-\cos x)^4+6(\sin x+\cos x)^2+4(\sin^6 x+\cos^6 x)=13$$

5 Show that

$$\frac{1}{\operatorname{cosec} A-\cot A}-\frac{1}{\sin A}=\frac{1}{\sin A}-\frac{1}{\operatorname{cosec} A+\cot A}$$

6 Prove that

$$\sin^8 A-\cos^8 A=(\sin^2 A-\cos^2 A)(1-2\sin^2 A\cos^2 A)$$

7 Show that

(i) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sec\theta-\tan\theta$

(ii) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta-1}$

8 Eliminate α from the following equations—

(i) $x=a\cos\alpha+b\sin\alpha,\quad y=a\cos\alpha-b\sin\alpha$

(ii) $x=a\cos\alpha+b\sin\alpha,\quad y=a\sin\alpha-b\cos\alpha$

(iii) $x=c\tan\alpha,\quad y=c\sec\alpha$

7.17 Signs of the trigonometric ratios—

By definition of the trigonometric ratios

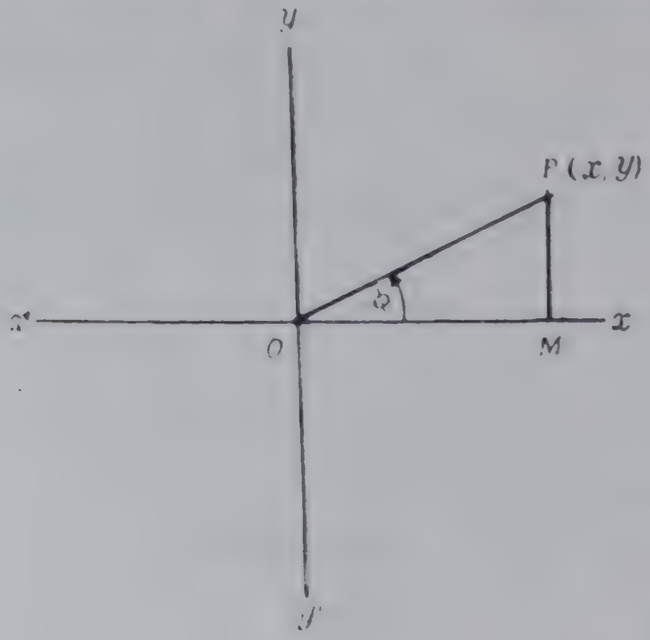


Fig. 7.9 (1)

4 ಸಾಧಿಸಿರಿ—

$$3(\sin x+\cos x)^4 + 6(\sin x+\cos x)^2 + 4(\sin^6 x+\cos^6 x) = 13$$

5 ಸಾಧಿಸಿರಿ—

$$\frac{1}{\operatorname{cosec} A-\cot A}-\frac{1}{\sin A}=\frac{1}{\sin A}-\frac{1}{\operatorname{cosec} A+\cot A}$$

6 ಸಾಧಿಸಿರಿ—

$$\sin^8 A-\cos^8 A=(\sin^2 A-\cos^2 A)(1-2\sin^2 A\cos^2 A)$$

7 ತೋರಿಸಿರಿ—

(i) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sec\theta-\tan\theta$

(ii) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta-1}$

8 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ α ವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿರಿ—

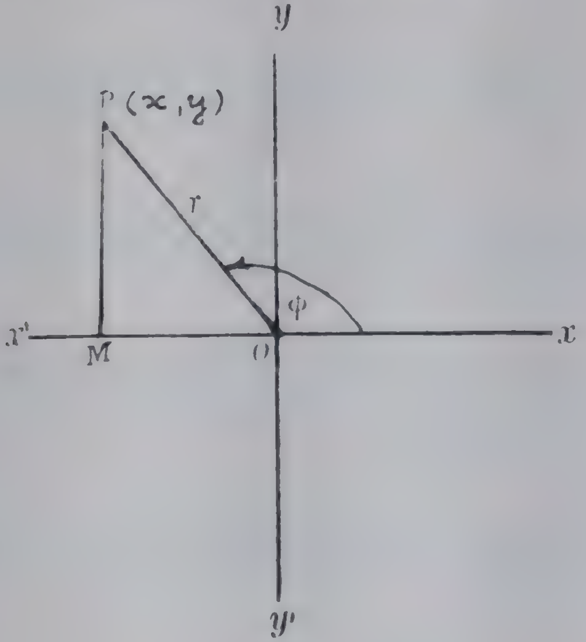
(i) $x=a\cos\alpha+b\sin\alpha,\quad y=a\cos\alpha-b\sin\alpha$

(ii) $x=a\cos\alpha+b\sin\alpha,\quad y=a\sin\alpha-b\cos\alpha$

(iii) $x=c\tan\alpha,\quad y=c\sec\alpha$

7.17 ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ



(2)

ಚಿತ್ರ 7·9 (2)

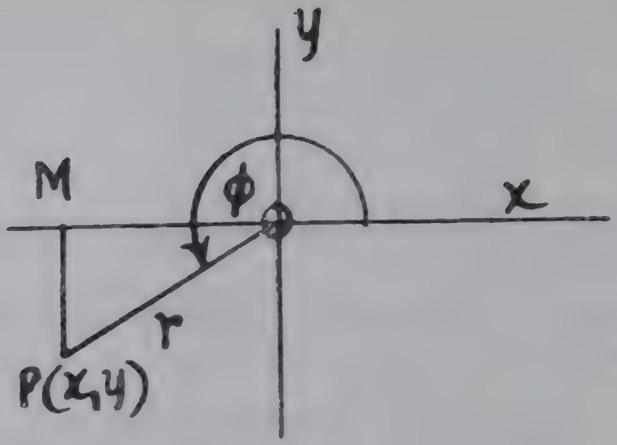


Fig. 7·9 (3)

$$\sin\Phi = \frac{y}{r}, \quad \Phi\cos = \frac{x}{r}$$

$$\tan\Phi = \frac{y}{x}, \qquad \cot\Phi = \frac{x}{y},$$

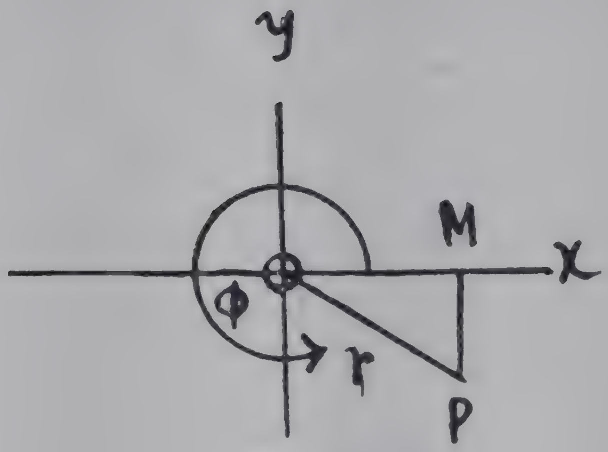
$$\sec\Phi = \frac{r}{x}, \qquad \text{cosec}\Phi = \frac{r}{y}$$

In the first figure θ is in the first quadrant. Here both x and y are positive. Therefore all the trigonometric ratios are positive.

In the second figure Φ is in the second quadrant. Here x is negative. Therefore cos Φ tan Φ. cotΦand sec Φ are negative.

In the third figure Φ is in the third quadrant. Here both x and y are negative. Therefore sin Φ, cos θ, sec θ and cosec θ are negative.

In the fourth figure Φ is in the fourth quadrant. Here y is negative. Therefore sinΦ, tanΦ, cotΦ and cosec Φare negative.



ಚಿತ್ರ 7.9 (3)

$$\sin \phi=\frac{y}{r}, \quad \cos \phi=\frac{x}{r},$$

$$\tan \phi=\frac{y}{x}, \quad \cot \phi=\frac{x}{y},$$

$$\sec \phi=\frac{r}{x}, \quad \operatorname{cosec} \phi=\frac{r}{y}$$

ಒಂದನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ϕ ಒಂದನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳೆರಡೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಎಲ್ಲ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ.

ಎರಡನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ϕ ಎರಡನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ x ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ, ಆದುದರಿಂದ $\cos \phi$, $\tan \phi$, $\cot \phi$ ಮತು $\sec \phi$ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ.

ಮೂರನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ϕ ಮೂರನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿದೆ, ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳೆರಡೂ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ, ಆದುದರಿಂದ $\sin\phi$, $\cos\phi$, $\sec\phi$, ಮತ್ತು $\operatorname{cosec} \phi$ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ.

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ θ ನಾಲ್ಕನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ y ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ $\sin \phi$, $\tan \phi$, $\cot \phi$ ಮತ್ತು $\operatorname{cosec} \phi$ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ.

The adjoining figure gives the summary of the above discussion.

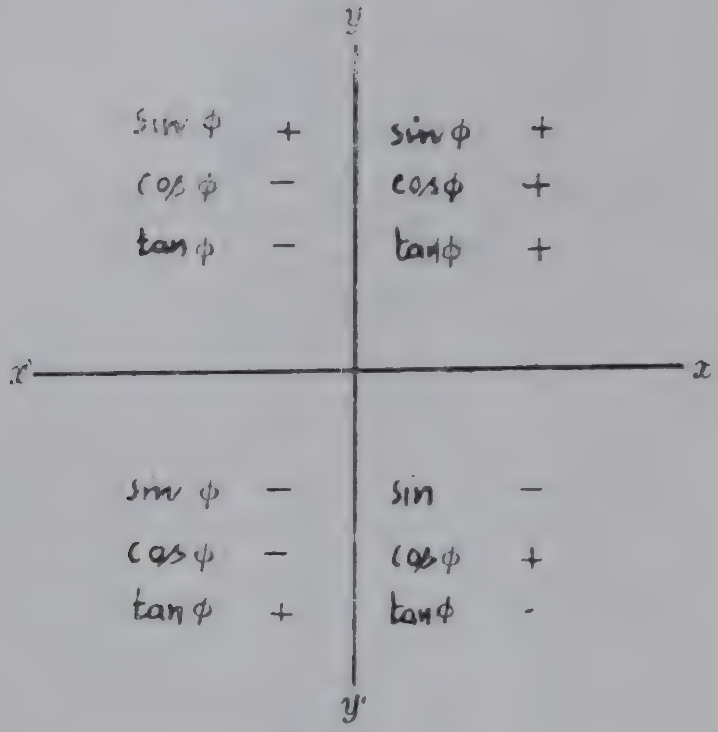


Fig. 7.10

The student will easily write down for himself the signs o the remaining trigonometric fuctions, *viz* cot ϕ, secϕ, cosecϕ in the several quadrants, from their definitions.

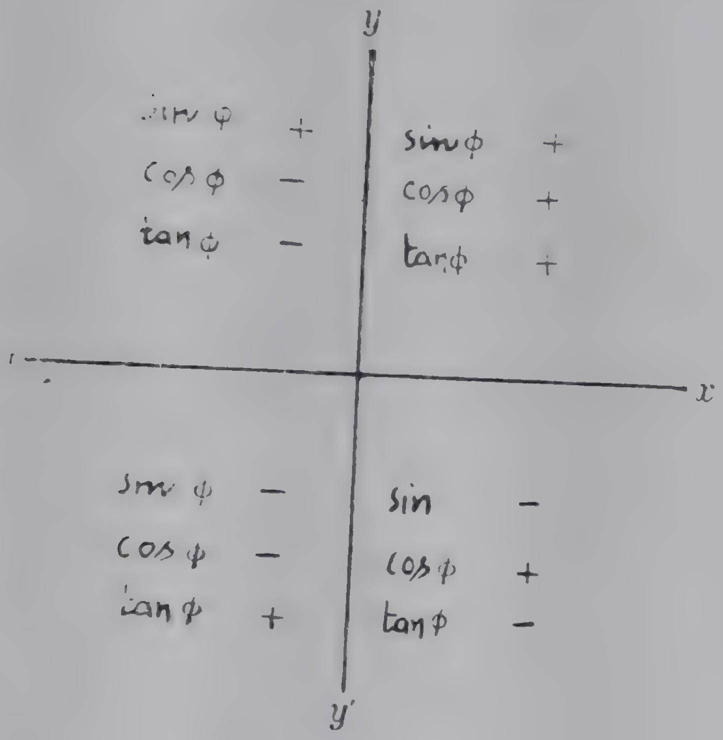
Exercises 7.3

1 If $\sin\theta = \dfrac{5}{13}$ and $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$

calculate the value of the expression

$$\frac{7\cos\theta - 6\tan\theta}{4\cot\theta + 3\sec\theta}$$

ಇವರೊಂದಿಗಿರುವ ಚಿತ್ರವು ಮೇಲಿನ ವಿಚಾರದ ಸಾರಾಂಶವನ್ನು ನೀಡುವುದು.



ಚಿತ್ರ 7.10

ಇನ್ನುಳಿದ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾದ cot ϕ, sec ϕ, cosec ϕ, ಇವುಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪಾದಗಳಲ್ಲಿ ಏನೆಂಬುದನ್ನು ಅವುಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 7.3

1 $\sin\theta = \frac{5}{13}$ ಮತ್ತು $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ಆದರೆ

$\frac{7\cos\theta - 6\tan\theta}{4\cot\theta + 3\sec\theta}$ ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[Here $OM \propto 12$. Since it is in the negative direction of the x-axis minus sign should qualify it. Therefore

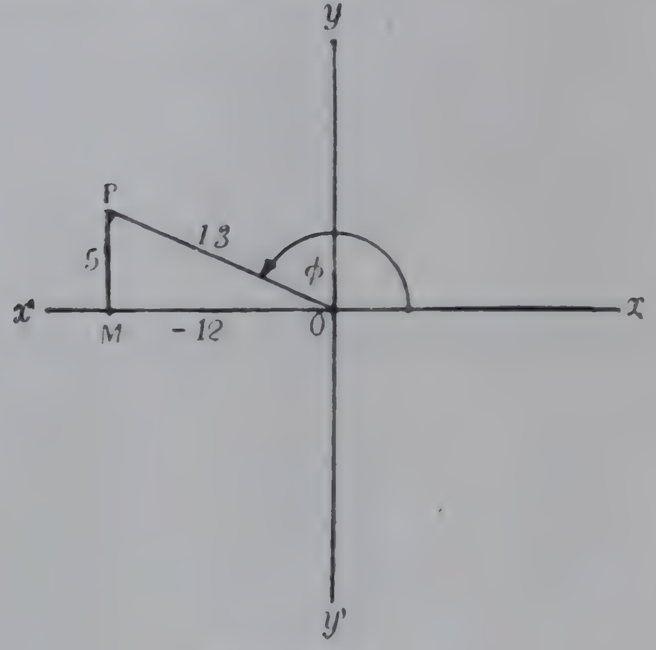


Fig. 7.11

$$\cos\theta = -\frac{12}{13}, \quad \tan\theta = -\frac{5}{12}, \text{ etc.]}$$

2 If $\cos\theta = \frac{-12}{35}$, and $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

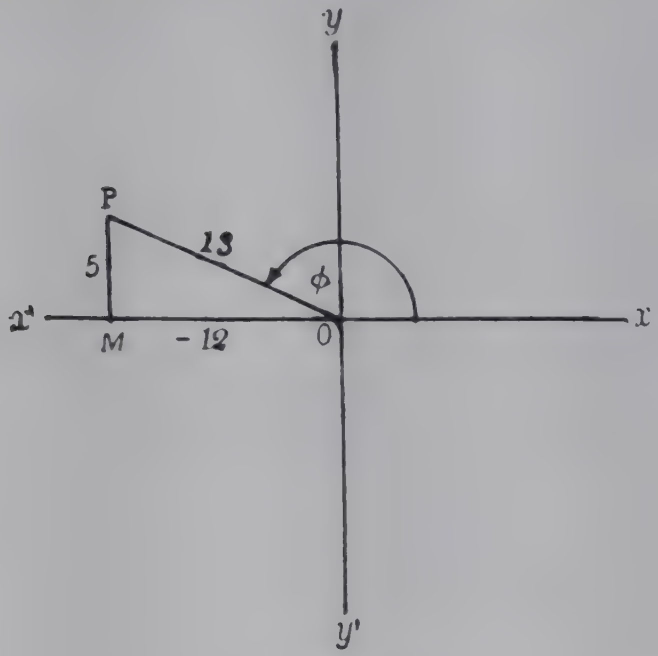
find the values of the remaining trigonometric ratios of θ.

3 If $\tan\theta = \frac{-3}{4}$ and $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ calculate the value

of $\dfrac{5\sin\theta + 6\cos\theta}{7\cot\theta - 8\sec\theta}$

4 If $\sin\theta = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$ Show that

[ಇಲ್ಲಿ OM ∝ 12. ಅದು x–ಅಕ್ಷದ ಋಣಾತ್ಮಕ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ 12ರ ಹಿಂದೆ ಋಣಚಿಹ್ನೆ ಬರೆಯಬೇಕು. ಆದುದರಿಂದ



ಚಿತ್ರ 7.11

$$\cos\theta = -\frac{12}{13},\ \tan\theta = -\frac{5}{12},$$ ಇತ್ಯಾದಿ]

2 $\cos\theta = -\frac{12}{35}$ ಮತ್ತು $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ಆದರೆ θ ಕೋನದ ಇತರ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3 $\tan\theta = -\frac{3}{4}$ ಮತ್ತು $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ಆದರೆ

$\dfrac{5\sin\theta + 6\cos\theta}{7\cot\theta - 8\sec\theta}$ ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

4 $\sin\theta = \dfrac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$ ಆದರೆ

$$\tan\theta + \cot\theta = \frac{(p^2 + q^2)^2}{2pq\,(p^2 - q^2)}$$

5 If $\sin\theta = \dfrac{m^2 + 2mn}{m^2 + 2mn + 2n^2}$

prove that

$$\tan\theta = \frac{m^2 + 2\,mn}{2mn + 2n^2}$$

7·18 Trigonometric Ratios of some well-known angles—

We now proceed to calculate the trigonometric values of 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 135° and 180°. In all the cases $P(x, y)$ is a point in the Ox, Oy plane such that $\angle xOP$ in the positive sense is the given angle. $OP = r$ is always positive. PM is drawn perpendicular to the x-axis.

(*a*) To find sin 0°, cos 0°, etc.

When $\angle xOP = 0°$, P concides with M and so.
$x = OM = OP = r$. $y = MP = PP = 0$

$$\therefore \sin 0° = \frac{y}{r} = 0, \quad \cos 0° = \frac{x}{r} = \frac{r}{r} = 1$$

$$\tan 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = \frac{0}{1} = 0$$

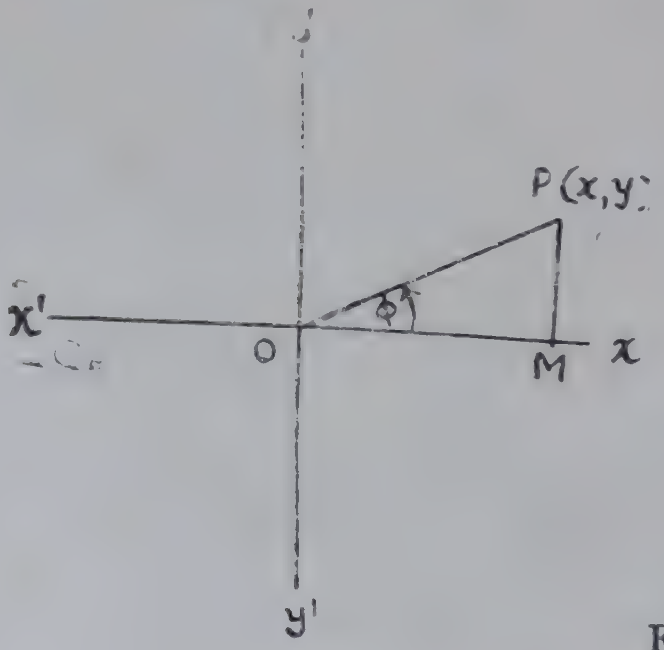


Fig. 7.12

$$\tan\theta + \cot\theta = \frac{(p^2+q^2)^2}{2pq\,(p^2-q^2)}$$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

5 $$\sin\theta = \frac{m^2+2\,mn}{m^2+2\,mn+2\,n^2}$$ ಆದರೆ

$$\tan\theta = \frac{m^2+2\,mn}{2\,mn+2\,n^2}$$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

7·18 ಕೆಲವು ಸುಪರಿಚಿತ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

ನಾವೀಗ 0°, 30°, 45°. 60°. 90°, 135° ಮತ್ತು 180° ಇವುಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮುಂದುವರಿಯೋಣ. ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ $P\,(x, y)$ ಎನ್ನುವುದು Ox, Oy ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದು ಮತ್ತು $\angle xOP$ಯು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ದತ್ತಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. $OP = r$ ಯಾವಾಗಲೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. PMನ್ನು x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಬೇಕು.

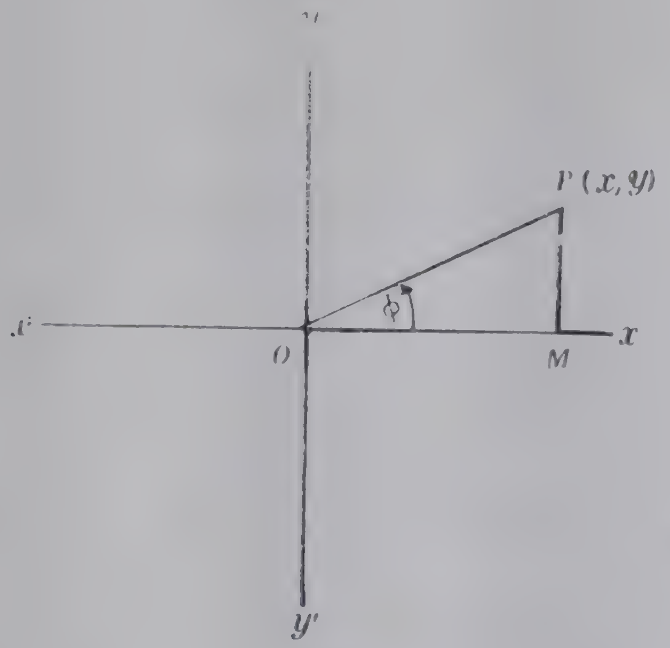
(*a*) $\sin 0^\circ$, $\cos 0^\circ$ ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ.

$\angle xOP = 0^\circ$ ಆದಾಗ Pಯು Mನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗಿರುವುದು. ಆದುದರಿಂದ

$$x = OM = OP = r,\quad y = MP = PP = 0$$

$$\sin 0^\circ = \frac{y}{r} = 0\,,\quad \cos 0^\circ = \frac{x}{r} = \frac{r}{r} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$



ಚಿತ್ರ 7.12

$$\cot 0^\circ = \frac{1}{\tan 0^\circ} = \frac{1}{0} \text{ infinitely great}$$

$$\sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{cosec } 0^\circ = \frac{1}{0}, \text{ infinitely great}$$

(*b*) To find sin 30°, cos 30°, etc.

In this case we have

$$MP = y = \frac{r}{2} \text{ and } OM = x = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

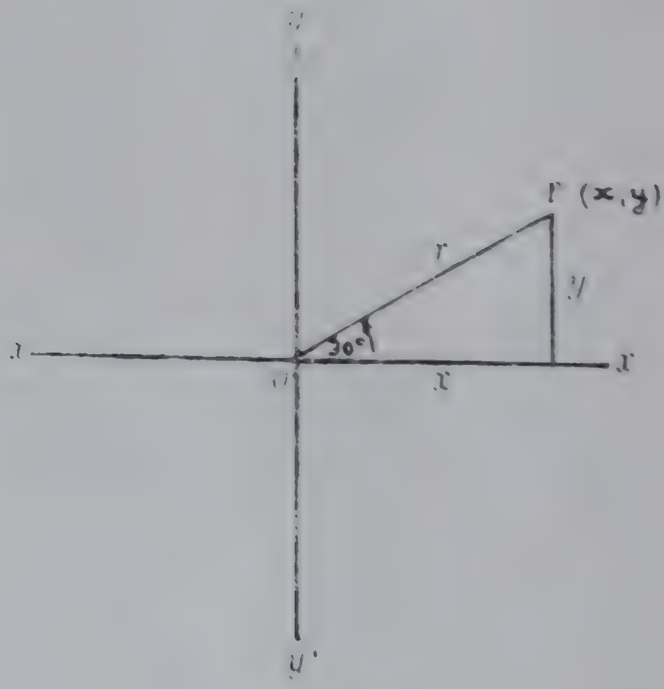


Fig. 7.13

$$\cot 0^\circ = \frac{1}{\tan 0^\circ} = \frac{1}{0}$$, ಅಪರ್ಯಾಪ್ತವಾಗಿದೆ.

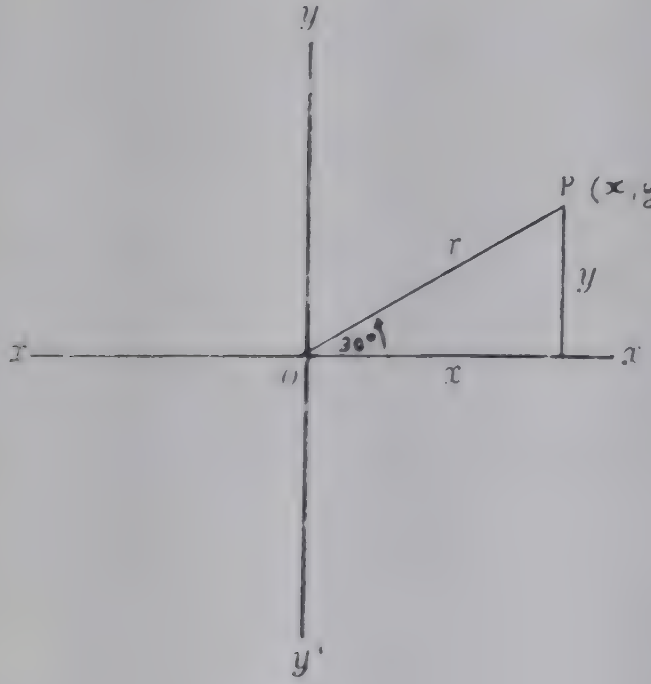
$$\sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{1}{\sin 0^\circ} = \frac{1}{0}$$, ಅಪರ್ಯಾಪ್ತವಾಗಿದೆ.

(*b*) $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$, ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ.

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $MP = y = \frac{r}{2}$ ಮತ್ತು

$$OM = x = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} r$$ ಎಂದು ಗೊತ್ತಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 7.13

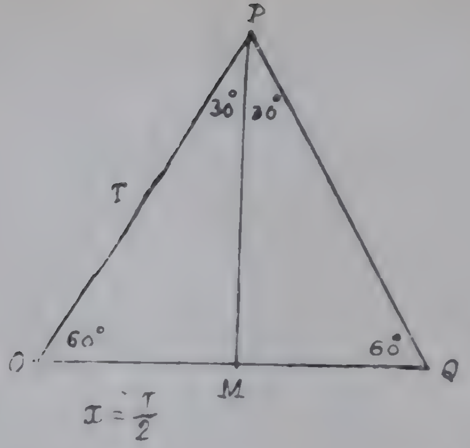


Fig. 7.14

$$\therefore \quad \sin 30^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cot 30^\circ = \sqrt{3},$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{cosec} 30^\circ = 2$$

(c To find sin 45°, cos 45°, etc.
In this case, $x = y$ and so

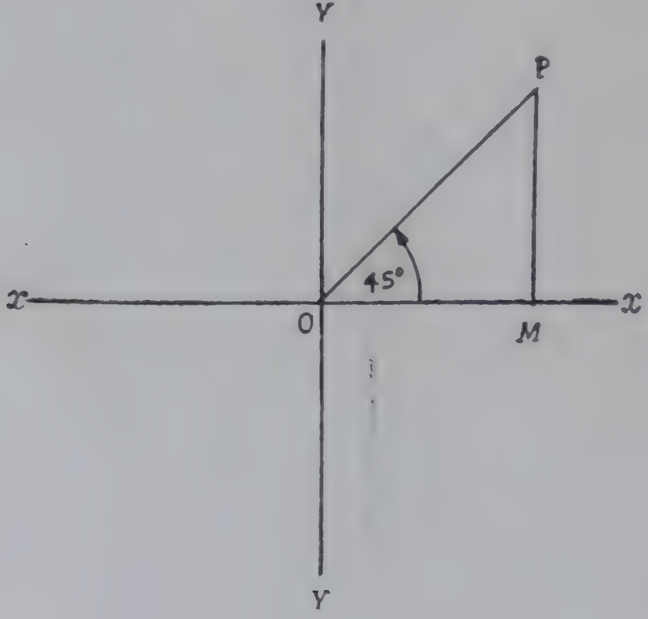
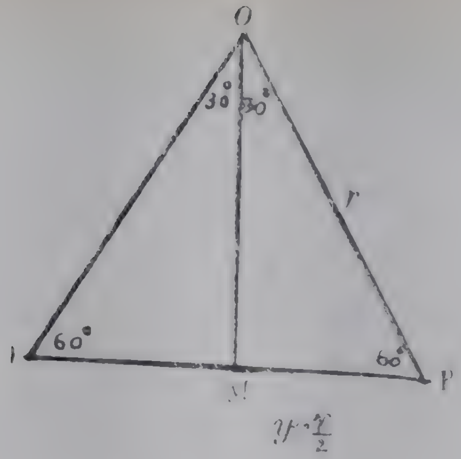


Fig. 7.15



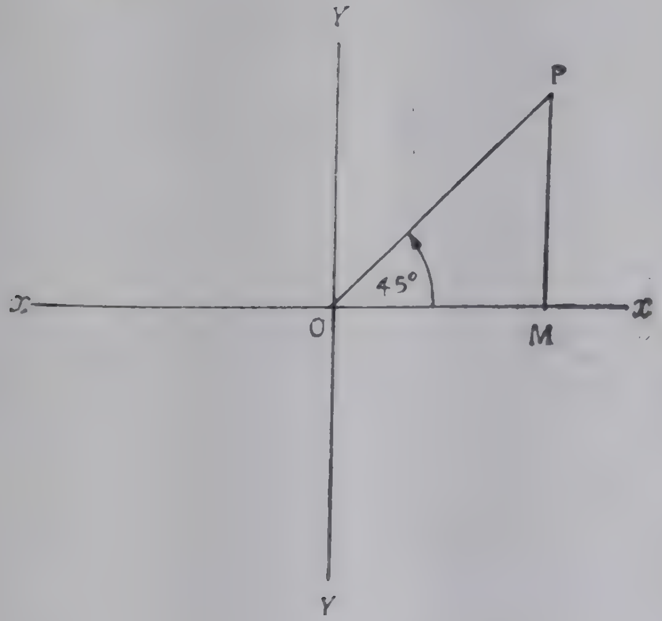
ಚಿತ್ರ 7.14

$$\therefore \sin\ 30^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{2},\ \cos\ 30^\circ = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\ 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sec\ 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}},\ \operatorname{cosec}\ 30^\circ = 2$$

(c) $\sin\ 45^\circ$, $\cos\ 45^\circ$ ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ. $x = y$. ಆದುದರಿಂದ



ಚಿತ್ರ 7.15

$r = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2}.\ x$

$\sin\ 45^\circ = \frac{y}{r} = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\ 45^\circ = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45^\circ = 1$, $\cot 45^\circ = 1$, $\sec 45^\circ = \sqrt{2}$
$\text{cosec } 45^\circ = \sqrt{2}.$

(*d*) To find sin 60°, cos 60°, etc

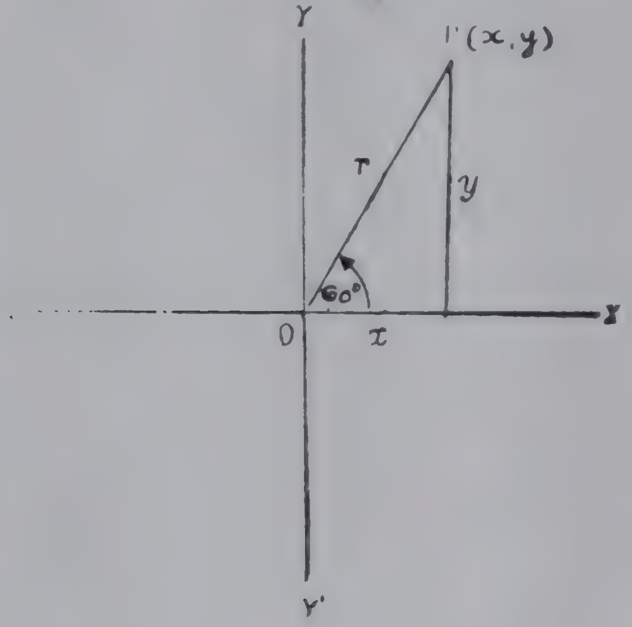


Fig. 7.16

In this case, $x = \frac{r}{2}$,

$y = \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\ r$

$\sin\ 60^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\ 60^\circ = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$

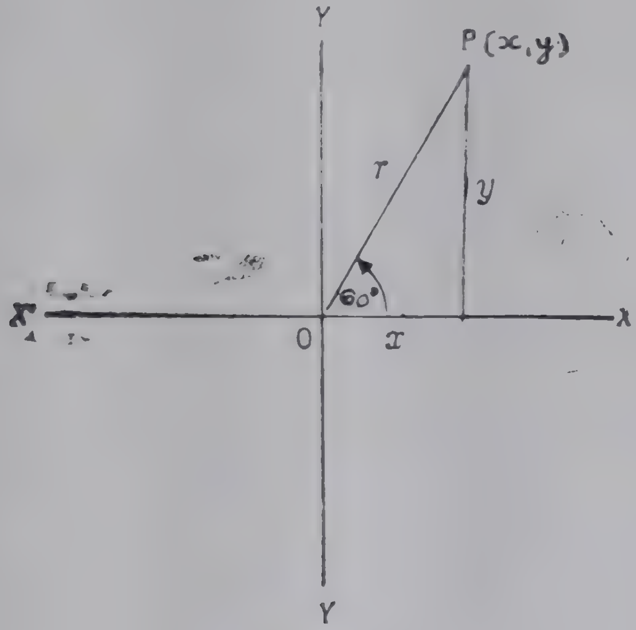
$$r=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2}.x$$

$$\sin\ 45^\circ = \frac{y}{r}=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\tan 45^\circ=1$, $\cot 45^\circ=1$, $\sec 45^\circ=\sqrt{2}$
$\operatorname{cosec} 45^\circ=\sqrt{2}$

(*d*) $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$, ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ.



ಚಿತ್ರ 7.16

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ. $x = \frac{r}{2}$, $y=\sqrt{r^2-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}r$

$$\sin 60^\circ=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60^\circ=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$$

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, $\cot 60^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\sec 60^\circ = 2$.

$\operatorname{cosec} 60^\circ = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(*e*) To find sin 90°, cos 90°, etc.

In this case, OP coincides with the y-axis. Therefore M coincides with O.

$$\therefore \quad OM = x = 0, \quad MP = y = OP = r$$

$$\sin 90^\circ = \frac{y}{r} = 1.$$

$$\cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0$$

$\tan 90^\circ = \dfrac{1}{0}$, infinitely great $\cot 90^\circ = 0$,

$\sec 90^\circ = \dfrac{1}{0}$, infinitely great, $\operatorname{cosec} 90^\circ = 1$

(*f*) To find sin 135°. cos 135°. etc. In this case numerically

$OM = MP \qquad \therefore \quad x = y.$

But OM is negative.

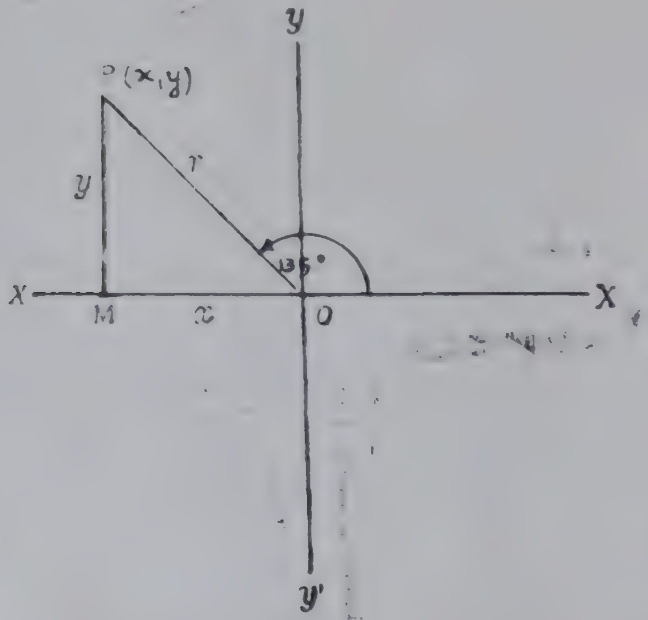


Fig. 7.17

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, $\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sec 60^\circ = 2$,

$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

(e) $\sin 90^\circ$, $\cos 90^\circ$ ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ.

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ OPಯು OY-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದ M, Oನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದು.

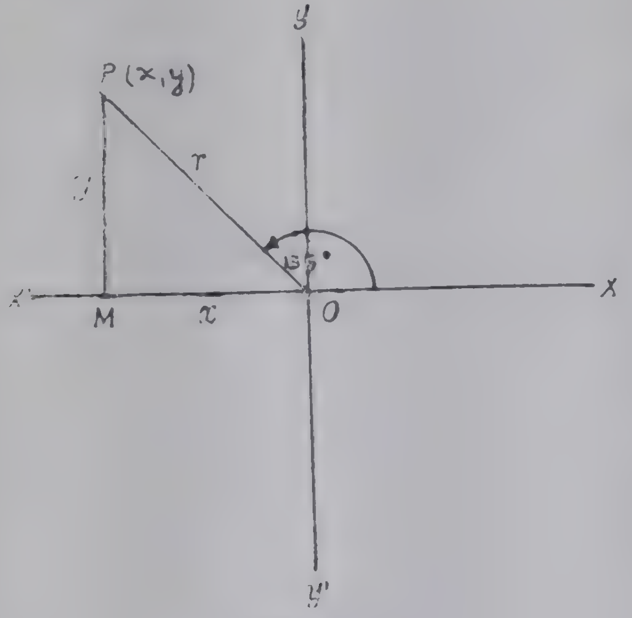
$\therefore OM = x = 0, \quad MP = y = OP = r$

$\sin 90^\circ = \frac{y}{r} = 1, \quad \cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0$

$\tan 90^\circ = \frac{1}{0}$, ಅಪರ್ಯಾಪ್ತ, $\cot 90^\circ = 0$,

$\sec 90^\circ = \frac{1}{0}$, ಅಪರ್ಯಾಪ್ತ, $\operatorname{cosec} 90^\circ = 1$

(f) $\sin 135^\circ$, $\cos 135^\circ$ ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ OM, MP ಗಳು ನಿಜಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. $\therefore x = y$ ಆದರೆ OM ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 7.17

$\therefore \quad OM^2 + MP^2 = OP^2$

$x^2 + x^2 = y^2 + y^2 = r^2$

$\therefore \quad 2x^2 = 2y^2 = r^2$

$\therefore \quad x = -\frac{r}{\sqrt{2}}, \; y = +\frac{r}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad \sin 135^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \; \cos 135^\circ = \frac{x}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 135^\circ = -1, \; \cot 135^\circ = -1,$

$\sec 135^\circ = -\sqrt{2}, \; \text{cosec } 135^\circ = \sqrt{2}$

(*g*) To find sin 180°, con 180°, etc.

In this case OP coincides with Ox' the negative direction of the x-axis.

Therefore $PM = 0$

$\therefore \quad x = -r$ (OM is negative)

$y = 0$

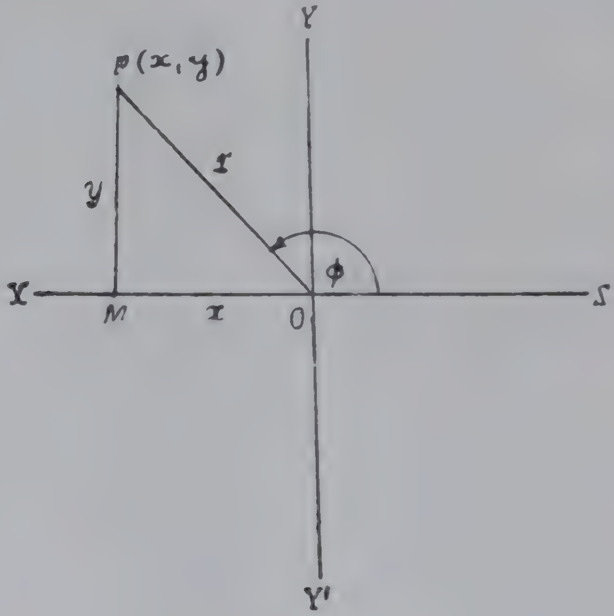


Fig. 7.18

$\therefore\ OM^2 + MP^2 = OP^2$

$x^2 + x^2 = y^2 + y^2 = r^2$

$\therefore\ 2x^2 = 2y^2 = r^2$

$\therefore\ x = -\frac{r}{\sqrt{2}},\ y = +\frac{r}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \sin 135^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos 135^\circ = \frac{x}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

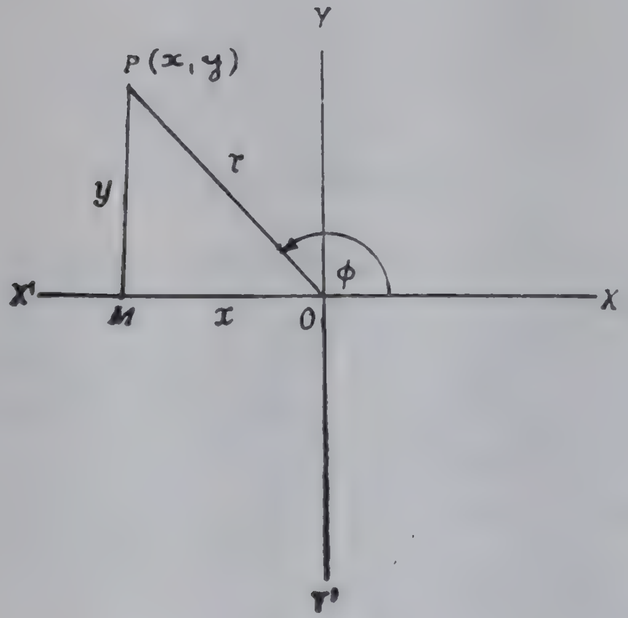
$\tan 135^\circ = -1, \quad \cot 135^\circ = -1,$

$\sec 135^\circ = -\sqrt{2}, \operatorname{cosec} 135^\circ = \sqrt{2}$

(g) sin 180°, cos 180° ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ.

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ OPಯು OX'ನಲ್ಲಿ (x-ಅಕ್ಷದ ಋಣಾತ್ಮಕ ದಿಶೆ) ಐಕ್ಯವಾಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದ $PM = 0 \ \therefore\ x = -r$ (OM ಋಣಾತ್ಮಕ)

$y = 0$



ಚಿತ್ರ, 7.18

$\therefore \quad \sin 180^\circ = \frac{y}{r} = 0, \quad \cos 180^\circ = \frac{x}{r} = 1$

$\tan 180^\circ = 0, \quad \cot 180^\circ = \frac{-1}{0}$, infinitely great

$\sec 180^\circ = -1, \quad \text{cosec } 180^\circ = \frac{1}{0}$, infinitely great

7.19 A summary of the previous results is given herebelow.

Trig. Ratio	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	135^0	180^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	-1	0

Exercises 7.4

1 Calculate the values of the trigonometric ratios of the following angles :—

((i) 120°, (ii) 150°, (iii) 210°, (iv) 225°, (v) 240°, (vi) 270°, (vii) 300°, (viii) 315°, (ix) 330°, (x) 360°, (xi) 930°, (xii) 1380°,

(xiii) $\frac{5\pi}{4}$. (xiv) $\frac{7\pi}{3}$, (xv) $\frac{11\pi}{6}$, (xvi) $\frac{9\pi}{2}$,

(xvii) $\frac{21\pi}{4}$, (xviii) $\frac{13\pi}{6}$

$$\therefore \sin 180^\circ = \frac{y}{r} = 0,$$

$$\cos 180^\circ = \frac{y}{r} = -1$$

$\tan 180^\circ = 0$, $\cot 180^\circ = \frac{1}{0}$, ಅಪರ್ಯಾಪ್ತ

$\sec 180^\circ = -1$, $\text{cosec}\ 180^\circ = \frac{1}{0}$, ಅಪರ್ಯಾಪ್ತ

7.19 ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸಾರಾಂಶವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ತ್ರಿ.ಮಿ. ಉತ್ಪನ್ನ	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	-1	0

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 7.4

1 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ—

(i) 120°, (ii) 150°, (iii) 210°, (iv) 225°, (v) 240°, (vi) 270°, (vii) 300°, (viii) 315°, (ix) 330°, (x) 360°, (xi) 930°, (xii) 1380°,

(xiii) $5\frac{\pi}{4}$, (xiv) $7\frac{\pi}{3}$, (xv) $11\frac{\pi}{6}$, (xvi) $9\frac{\pi}{2}$.

(xvii) $21\frac{\pi}{4}$, (xviii) $13\frac{\pi}{6}$

2 Evaluate

(i) $2 \sin 30° \cos 30° \cot 60°$

(ii) $\frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{3} + \sec^2 \frac{\pi}{4} - 2 \cot^2 \frac{\pi}{3}$

(iii) $\cos 60° - \tan^2 45° + \frac{3}{4} \tan^2 30° + \cos^2 30° - \sin 30°$

(iv) $\sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} + \tan \frac{5\pi}{6}$

(v) $\sin 120° + \cos 225° - \tan 330°$

(vi) $\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{6} - \sec \frac{7\pi}{6}$

3 Find x from the equation

$$x \sin 30° \cos^2 45° = \frac{\cot^2 30° \sec 60° \tan 45°}{\operatorname{cosec}^2 45° \operatorname{cosec} 30°}.$$

4 Verify the formula

$$\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \text{ when}$$

(*a*) $A = 60°$, (*b*) $A = 120°$, (*c*) $A = 300°$

7.20 Use of Tables—

While solving problems in trigonometry we often come across trigonometric ratios such as $\sin 35°14'$, $\cos 47°11'$, $\tan 80°13'$, etc. In all standard books called " Mathematical Tables " pages with the following headings can easily be located—Natural Sines, Natural Cosines, etc. and Logarithmic Sines, logarithmic Cosines, etc.

From the natural sines page we get,

$$\begin{aligned} \sin 35° 14' &= 0.5764 \\ &\ 0.0005 \quad \textit{add} \\ \hline &\ 0.5769 \\ \hline \end{aligned}$$

2 ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ—

(i) $2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ \quad \cot 60^\circ$

(ii) $\frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{3} + \sec^2 \frac{\pi}{4} - 2 \cot^2 \frac{\pi}{3}$

(iii) $\cos 60^\circ - \tan^2 45^\circ + \frac{3}{4} \tan^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin 30^\circ$

(iv) $\sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} + \tan \frac{5\pi}{6}$

(v) $\sin 120^\circ + \cos 225^\circ - \tan 330^\circ$

(vi) $\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{6} - \sec \frac{7\pi}{6}$

3 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ xನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ—

$$x \sin 30^\circ \cos^2 45^\circ = \frac{\cot^2 30^\circ \sec 60^\circ \tan 45^\circ}{\operatorname{cosec}^2 45^\circ \operatorname{cosee} 30^\circ}$$

4 (a) $A=60^\circ$ (b) $A=120^\circ$, (c) $A=300^\circ$ ಆದಾಗ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳು ಸರಿಯಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ--

$$\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

7·20 ಟೇಬಲ್ಸ್‌ನ ಉಪಯೋಗ

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ $\sin 35^\circ 14'$, $\cos 47^\circ 11'$, $\tan 80^\circ 13'$ ಮುಂತಾದ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು, ಆಗಾಗ ಇದಿರಾಗುವುವು. Mathematical Tables ಎಂದು ಹೆಸರಿರುವ ಎಲ್ಲ ಉತ್ತಮ ಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಕೆಳಗಿನ ಶೀರ್ಷಿಕೆಗಳಿರುವ ಪುಟಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗುರುತಿಸಬಹುದು –Natural Sines, Natural Cosines, ಇತ್ಯಾದಿ. Logarithmic Sines, Logarithmic Cosines, ಇತ್ಯಾದಿ.

Natural Sines ಪುಟದಿಂದ ನಮಗೆ ದೊರೆಯುವ ವಿವರ,

$\sin 35^\circ 14' = 0{\cdot}5764$

$\ 0{\cdot}0005$ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

$\ 0{\cdot}5769$

sin 35°12′ is first observed and then from the mean difference column for 2′ the corresponding value 0.0005 is added.

From the Natural Cosines page we get,

$$\cos 47^\circ\ 11' = 0.6807$$
$$\quad 0.0011 \quad \textit{subtract}$$
$$\overline{\quad 0.6796 \quad}$$

cos 47°6′ is first observed and then from the mean difference column for 5′ the corresponding value 0.0011 is subtracted.

Similarly from the Natural Tangents page we get,

$$\tan 80^\circ\ 13' = 5.7894$$

From the Logarithmic Sines. Logarthmic Cosines and Logarithmic Tangents pages we get,

$$\log \sin 35^\circ\ 14' = \bar{1}.7611 \text{ means } -1+0.7611$$

$$\log \cos 47^\circ\ 11' = \bar{1}.8323 \text{ means } -1+0.8323$$

$$\log \tan 80^\circ\ 13' = 0.7634$$

7.21 We meet yet another type of problems. Given the value of a trigonometric ratio, to find the angle.

Ex : $\sin \theta = 0.7345$, find θ

From the Natural Sines page it is easy to see that the value of the angle satisfying the above relation is 47° 16′

Ex : $\cos \theta = 0.3639$, find θ.

From the Natural Cosines page (mean difference to be subtracted) we get $\theta = 68^\circ\ 40'$

Similarly when $\log \sin \theta = \bar{1}.7085$, from the Logarithmic Sine page we can easily get, $\theta = 30^\circ\ 45'$. If $\log \cos \theta = \bar{1}\cdot3061$ from the Logarithmic Cosines page (mean difference to be subtracted) $\theta = 78^\circ\ 19'$.

ಮೊದಲು sin 35°12′ ಇದರ ಬೆಲೆ ಬರೆದು, mean differences ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 2′ನ ಬೆಲೆ 0·0005ಯನ್ನು ಇದಕ್ಕೆ ಕೂಡಿಸಬೇಕು.

Natural Cosines ಪುಟದಿಂದ ನಮಗೆ ದೊರೆಯುವ ವಿವರ,

$$\cos 47°\ 11' = 0{\cdot}6807$$

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}0011 \text{ ಕಳೆಯಿರಿ} \\ \hline 0{\cdot}6796 \\ \hline \end{array}$$

ಮೊದಲು cos 47° 6′ ಇದರ ಬೆಲೆ ಬರೆದು mean differences ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 5′ನ ಬೆಲೆ 0.0011ಯನ್ನು ಇದರಿಂದ ಕಳೆಯಬೇಕು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ Natural Tangents ಪುಟದಿಂದ,

$\tan 80°\ 13' = 5{\cdot}7894$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

Logarithmic Sines, Logarithmic Cosines ಮತ್ತು Logarithmic Tangents ಪುಟಗಳಿಂದ

$\log \sin 35°\ 14' = \bar{1}{\cdot}7611$ ಅಂದರೆ
$-1 + 0{\cdot}7611$

$\log \cos 47°\ 11' = \bar{1}{\cdot}8323$ ಅಂದರೆ
$-1 + 0{\cdot}8323$

$\log \tan 80°\ 13' = 0{\cdot}7634$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

7·21 ಇನ್ನೂ ಒಂದು ವಿಧದ ಪ್ರಶ್ನೆ ನಮಗೆ ಇದಿರಾಗುವುದು : ತ್ರಿಕೋಣ ಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಆ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಂ ಸಾಧ್ಯವೇ ?

ಉದಾಹರಣೆ: $\sin \theta = 0{\cdot}7345$, θ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

Natural Sines ಪುಟದಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೊಂದುವ ಕೋನದ (θ ದ) ಬೆಲೆ 47° 16′ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ: $\cos \theta = 0{\cdot}3639$, θವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

Natural Cosines ಪುಟದಿಂದ (mean differenceನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು) ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೊಂದುವ ಕೋನದ (θದ) ಬೆಲೆ 68° 40′ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\log \sin \theta = \bar{1}{\cdot}7085$ ಎಂದಿದ್ದಾಗ Logarithmic Sines ಪುಟದಿಂದ $\theta = 30°\ 45'$
ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. $\log \cos \theta = \bar{1}.3061$ ಆದಾಗ Logarithmic Cosines ಪುಟದಿಂದ (Mean differenceನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು) $\theta = 78°19'$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

Example

Simplify : $\dfrac{\sin 33^\circ\ 15' \times \cos 42^\circ\ 19'}{\tan\ 27^\circ\ 39'}$

Let the given expression be equal to x.

$$\log x = \log \sin 33^\circ\ 15' + \log \cos 42^\circ\ 19' - \log \tan 27^\circ\ 39'$$

$$= \begin{array}{l} \bar{1}.7390 \\ \bar{1}.8689 \\ \hline \bar{1}.6079 \\ \bar{1}.7192 \\ \hline \bar{1}.8887 \end{array} - \bar{1}.7192$$

$$\therefore x = 0.7739$$

Exercises 7.5

1 Calculate the values of

(i) $\sin 63^\circ\ 37'$

(ii) $\cos 43^\circ\ 54'$

(iii) $\tan 33^\circ\ 33'$

(iv) $\sin 43^\circ\ 13'$

2 Simplify

$$\frac{\cos 36^\circ\ 13'\ \cos 43^\circ\ 43'}{\sin 49^\circ\ 15'\ \sin 54^\circ\ 56'}$$

3 Determine given (i) $\sin \theta = 0.7237$

(ii) $\cos \theta = 0.6941$,

(iii) $\tan \theta = 1.7107$

(iv) $\cot \theta = 0.8146$,

(v) $\tan \theta = 0.6666$

(vi) $\cos \theta = 0.4444$

ಉದಾಹರಣೆ

ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ : $\dfrac{\sin 33^\circ 15' \times \cos 42^\circ 19'}{\tan 27^\circ 39'}$

ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನವು x ಎಂದಾಗಿರಲಿ.

$\log x = \log \sin 33^\circ 15' + \log \cos 42^\circ 19'$
$- \log \tan 27^\circ 39'$

$$= \bar{1}.7390$$
$$\bar{1}.8689 \quad - \bar{1}.7192$$
$$\bar{1}.6079$$
$$\bar{1}.7192$$
$$\bar{1}.8887$$
$$\therefore x = 0.7739$$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 7·5

1 ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ—

(i) $\sin 63^\circ 37'$, (ii) $\cos 43^\circ 54'$

(iii) $\tan 33^\circ 33'$, (iv) $\sin 43^\circ 13'$

2 ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ—

$$\frac{\cos 36^\circ 13' \ \cos 43^\circ 43'}{\sin 49^\circ 15' \ \sin 54^\circ 56'},$$

3 ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗಿ, θ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ

(i) $\sin \theta = 0{\cdot}7237$ (ii) $\cos \theta = 0{\cdot}6941$

(iii) $\tan \theta = 1{\cdot}7107$ (iv) $\cot \theta = 0{\cdot}8146$

(v) $\tan \theta = 0{\cdot}6666$ (vi) $\cos \theta = 0{\cdot}4444$

CHAPTER 8

Rightangled Triangle

8.1. Solution of the Rightangled Triangle—

The three sides and the three angles of a triangl are together called its six elements. Given three element of a triangle, which are not all angles, the remaining ele ments can be calculated (without measuring them) by th help of these elements and the use of trigonometric ratios This process is called "the solution of the triangle".

In the case of a right angled triangle one element i known (=90°) and a simple relation exists between th sides and the hypotenuse. Further the ratios of pairs o its sides can be expressed as trigonometric ratios of th angles of the triangle

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\frac{AB}{AC} = \sin C = \cos A$$

$$\frac{BC}{AC} = \sin A = \cos C$$

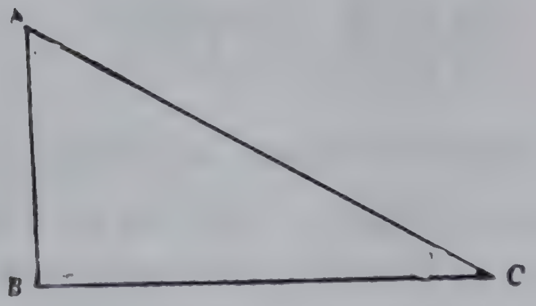


Fig. 8·1

ಅಧ್ಯಾಯ 8

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣ

8·1 ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ—

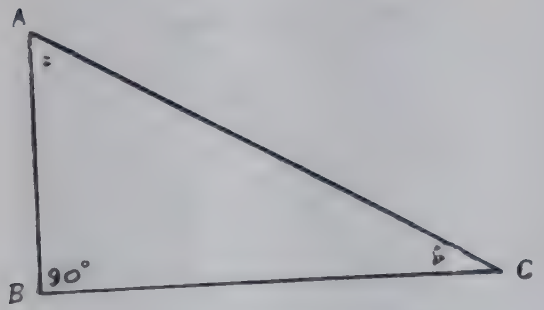
ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣದ ಮೂರು ಭುಜಗಳೂ ಮೂರು ಕೋನಗಳೂ ಅದರ ಆರು ಮೂಲಾಂಶಗಳು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರು ಮೂಲಾಂಶಗಳು ದತ್ತವಾದಾಗ (ಅವೆಲ್ಲವೂ ಕೋನಗಳಾಗಿರಬಾರದು) ಉಳಿದವುಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡದೆ ದತ್ತ ಮೂಲಾಂಶಗಳ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು " ತ್ರಿಕೋಣದಬಿಡಿಸುವಿಕೆ " ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೂಲಾಂಶ ಗೊತ್ತಿದೆ ($= 90°$) ; ಮತ್ತು ಅದರ ಭುಜಗಳಿಗೂ ಕರ್ಣಕ್ಕೂ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವಿದೆ. ಅಲ್ಲದೇ ಅದರ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಆ ತ್ರಿಕೋಣದ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣ ಗಳಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\frac{AB}{AC} = \sin C = \cos A$$

$$\frac{BC}{AC} = \sin A = \cos C$$



ಚಿತ್ರ 8.1

As a simple illustration let us solve the triangle ABC in which $\angle B=90°$, $BC=2$, $\angle A=60°$.

It is clear that $\angle C=30°$.

$$\frac{AC}{BC}=\sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \therefore\ AC=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{AB}{BC}=\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore\ AB=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Exercises 8.1

Solve the following triangles :—

(1) $a=3$ $b=4$, $\angle A=90°$

(2) $\angle A=90°$ $\angle B=37°3'$, $a=4.7$

(3) $\angle A=35°$, $\angle B=90°$, $c=3$

(4) $\angle C=90°$, $a=5$, $c=7$

(5) $\angle B=90°$, $b=12$, $a=5$

8.2 Heights and Distances

In many simple cases the calculation of the height and distance of an object leads to the solution of a right angled triangle.

Consider an object P at a height h above the horizontal line through the observer 'O'. The angle MOP is called the *angle of elevation* of P as seen from 'O'. If a horizontal

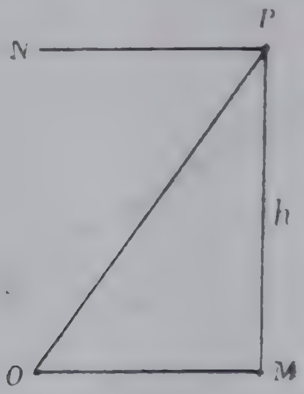


Fig. 8·2

ಸುಲಭ ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ $\angle B = 90°$, $BC = 2$, $\angle A = 60°$ ಇರುವಂತಹ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

$\angle C = 30°$ ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

$$\frac{AC}{BC} = \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \therefore \quad AC = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{AB}{BC} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore \quad AB = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 8·1

ಈ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ—

(1) $a = 3, \quad b = 4, \quad \angle A = 90°$

(2) $\angle A = 90°, \quad \angle B = 37° 3', \quad a = 4{\cdot}7$

(3) $\angle A = 35°, \quad \angle B = 90°, \quad c = 3$

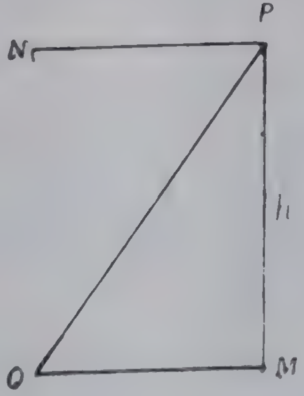
(4) $\angle C = 90°, \quad a = 5, \quad c = 7$

(5) $\angle B = 90°, \quad b = 12, \quad a = 5$

8·2 ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರ

ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಪ್ರಶ್ನೆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ.

O ಎಂಬ ವೀಕ್ಷಕನ ಕ್ಷಿತಿಜರೇಖೆ (OM) ಗಿಂತ h ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರುವ P ಎಂಬ ವಸ್ತುವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. MOP ಕೋನವನ್ನು Oನಿಂದ ಕಾಣುವಂತೆ Pಯ ಉನ್ನತಕೋನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. Pಯಿಂದ PN ಎನ್ನುವ ಕ್ಷಿತಿಜರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆದರೆ



ಚಿತ್ರ 8.2

line PN is drawn through P, angle NPO is called the *angle of depression* of 'O' as seen from P. Therefore the angle made by the line joining the observer to the object with the horizontal is called the angle of elevation or depression according as the object is above or below the horizontal line.

8.3 A simple illustration.

A vertical flagstaff stands on a horizontal plane. From a point distant 100 feet from its foot the angle of elevation of its top is found to be 60°. Find the height of the flagstaff.

Let AB be the flagstaff, height h. Let C be the observer on the horizontal plane through B. Then in the right angled triangle ABC, $ACB = 60°$.

$$\frac{AB}{BC} = \tan 60 \times = \sqrt{3} \quad \therefore \; h = BC\sqrt{3} = 100\sqrt{3} \text{ feet.}$$

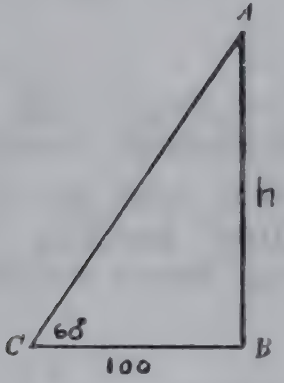


Fig. 8.3

Exercises 8.2

1 A person standing on the bank of a river observes that the angle subtended by a tree on the opposite bank is 60°. When he retires 40 feet directly from the bank he finds the angle to be 30°. Find the height of the tree and the breadth of the river.

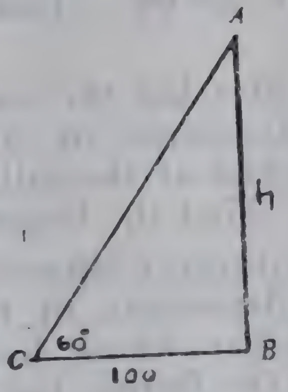
2 The angles of elevation of the summit of a hill from the top and bottom of a tower are 30° and 60°. If the height of the tower is 100 feet, find the height of the hill.

ದೊರೆಯುವ NPO ಕೋನವನ್ನು Pಯಿಂದ ಕಾಣುವಂತೆ Oವಿನ ಅವನತಕೋನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದುದರಿಂದ ವೀಕ್ಷಕನನ್ನು ಒಂದು ವಸ್ತುವಿಗೆ ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಕ್ಷಿತಿಜರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ರಚಿಸುವ ಕೋನವನ್ನು, ವಸ್ತುವು ಕ್ಷಿತಿಜರೇಖೆಗಿಂತ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಉನ್ನತಕೋನವೆಂದೂ, ತಗ್ಗಿನಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅವನತಕೋನವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

8.3 ಒಂದು ಸುಲಭ ಉದಾಹರಣೆ—

ಒಂದು ನೇರವಾದ ಧ್ವಜಸ್ತಂಭ ಸಮತಟ್ಟಾದ ನೆಲದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿದೆ. ಅದರ ಬುಡದಿಂದ ನೆಲದ ಮೇಲೆ 100 ಅಡಿ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಶಿಖರದ ಉನ್ನತಕೋನವು $60°$. ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

AB ಯು ಧ್ವಜಸ್ತಂಭವಾಗಿರಲಿ. ಎತ್ತರ h ಎಂದಿರಲಿ. Cಯು ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಬುಡ B ಇರುವ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿರುವ ವೀಕ್ಷಕನಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ABC ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $\angle ABC = 60°$.



ಚಿತ್ರ 8.3

$$\frac{AB}{BC} = \tan 60° = \sqrt{3} \qquad \therefore h = BC\sqrt{3} = 100\sqrt{3} \text{ ಅಡಿಗಳು}$$

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 8.2

1 ಒಂದು ಹೊಳೆಯ ದಂಡೆಯ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿರುವ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯ ಇದಿರು ದಂಡೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಮರ ಅವನಲ್ಲಿ $60°$ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವುದಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತಾನೆ. ಅವನು 40 ಅಡಿ ಹಿಂದೆ ನಡೆದು ನೋಡಿದಾಗ ಆ ಕೋನ $30°$ ಎಂದು ಕಂಡನು. ಹಾಗಾದರೆ ಮರದ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಹೊಳೆಯ ಅಗಲ ಎಷ್ಟು?

2 ಒಂದು ಗೋಪುರದ ಬುಡದಿಂದ ಮತ್ತು ಶಿಖರದಿಂದ, ಒಂದು ಬೆಟ್ಟದ ಶಿಖರದ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $30°$, $60°$. ಆ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ 100 ಅಡಿಗಳಾದರೆ ಬೆಟ್ಟದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4 From the foot of a post the elevation of the top of a clock tower is 45°, and from the top of the post, which is 30 feet high the elevation is 30°. Find the height and distance of the clock tower.

5 A tower casts a shadow 200 feet long when the sun's altitude is 30°. Find the height of the tower.

6 From the top of a light house 200 feet high the angles of depression of the top of the mast of a ship and its reflection in water are found to be 45° and 60 respectively. What is the height of the mast ?

7 At the foot of a mountain the elevation of its summit is found to be 45°. After ascending one mile towards the mountain up a slope of 30° incl nation the elevation is found to be 60°. Find the height of the mountain.

8 From the top of a hill the angles of depression of two consecutive mile-stones on a level straight road running through the foot of the hill are found to be 30° and 60° respectively. Find the height of the hill.

9 The horizontal distance between two towers is 100 feet. If the angle of depression of the top of one tower from the top of the other whose height is 150 feet is 30° what is the height of the former tower ?

10 There are two posts of equal heights on either sides of a road such that the line joining their feet is perpendicular to the road. An observer stands on this line and observes the angles of elevation of the top points of the posts to be 30° and 60°. Find the height of the posts and the position of the observer.

8.4 Related angles

For a given angle ϕ, angles $-\phi$, $\frac{\pi}{2} \pm \phi$, $\pi \pm \phi$ and $2\pi \pm \phi$ are called *related or allied angles*. We shall now see how the trigonometric ratios of these related angles can be expressed in terms of those of ϕ.

4 30 ಅಡಿ ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ಕಂಬದ ಬುಡದಿಂದ ಮತ್ತು ಅದರ ಶಿಖರದಿಂದ ಗಡಿಯಾರ ಗೋಪುರವೊಂದರ ಶಿಖರದ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 45° ಮತ್ತು 30° ಆಗಿ ಕಾಣುತ್ತವೆ. ಗಡಿಯಾರ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5 ಸೂರ್ಯನ ಉನ್ನತಿಯು 30° ಆದಾಗ ಒಂದು ಗೋಪುರವು 200 ಅಡಿ ಉದ್ದದ ನೆರಳನ್ನು ಚಾಚುವುದು. ಆ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6 200 ಅಡಿ ಎತ್ತರದ ಒಂದು ದೀಪಸ್ತಂಭದ ಶಿಖರದಿಂದ ನೋಡಿದಾಗ ಒಂದು ಹಡಗಿನ ಕೂವೆ ಮರದ ಶಿಖರದ ಮತ್ತು ಅದರ ನೀರಿನಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಫಲಿತ ಬಿಂದುವಿನ ಅವನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 45° ಮತ್ತು 60° ಆಗಿವೆ. ಆ ಕೂವೆ ಮರದ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು?

7 ಒಂದು ಬೆಟ್ಟದ ಬುಡದಿಂದ ಅದರ ಶಿಖರದ ಉನ್ನತಕೋನ 45° ಆಗಿ ಕಾಣುವುದು. ಶಿಖರದೆಡೆಗೆ 30° ಓಟ (ಏರು) ಇರುವ ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೈಲು ನಡೆದ ಮೇಲೆ ಉನ್ನತಕೋನ 60° ಆಗಿ ಕಾಣುವುದು. ಬೆಟ್ಟದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8 ಒಂದು ಬೆಟ್ಟದ ಶಿಖರದಿಂದ ನೋಡಿದಾಗ ಅದರ ಬುಡದಿಂದ ಸಾಗುವ ಒಂದು ದಾರಿಯ ಮೇಲಿರುವ ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಮೈಲು ಕಲ್ಲುಗಳ ಅವನತ ಕೋನಗಳು 30° ಮತ್ತು 60° ಆಗಿ ಕಾಣುವುವು. ಬೆಟ್ಟದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9 ಎರಡು ಗೋಪುರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ (ಕ್ಷಿತಿಜದೂರ) 100 ಅಡಿಗಳು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 150 ಅಡಿ ಎತ್ತರದ ಗೋಪುರದ ಶಿಖರದಿಂದ ಇನ್ನೊಂದರ ಶಿಖರದ ಅವನತ ಕೋನವು 30° ಆದರೆ ಎರಡನೆಯ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು?

10 ಒಂದು ರಸ್ತೆಯ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲೂ ಒಂದೇ ಎತ್ತರದ ಎರಡು ಕಂಬಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳ ಬುಡಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆ ರಸ್ತೆಯ ಬದಿಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. ಈ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಬ್ಬನು ನಿಂತು ನೋಡಿದಾಗ ಕಂಬಗಳ ಶಿಖರಗಳ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು 30° ಮತ್ತು 60° ಆಗಿ ಕಂಡರೆ ಕಂಬಗಳ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವೀಕ್ಷಕನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8.4 ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳು

ϕ ಎಂಬ ದತ್ತಕೋನಕ್ಕೆ $-\phi$, $\frac{\pi}{2} \pm \phi$, $\pi \pm \phi$ ಮತ್ತು $2\pi \pm \phi$ ಇವುಗಳು ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ϕ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು ಹೇಗೆಂದು ಈಗ ತಿಳಿಯೋಣ.

In all the following discussions OP bounds the angle
measured in the positive sense. P is the point (x, y) ar
$OP=r$ which is always positive. OP' bounds the relat
angle. OP' is taken equal to OP $(=r)$. P' is the poi
(x',y'). PM and $P'M'$ are drawn perpendiculars to t

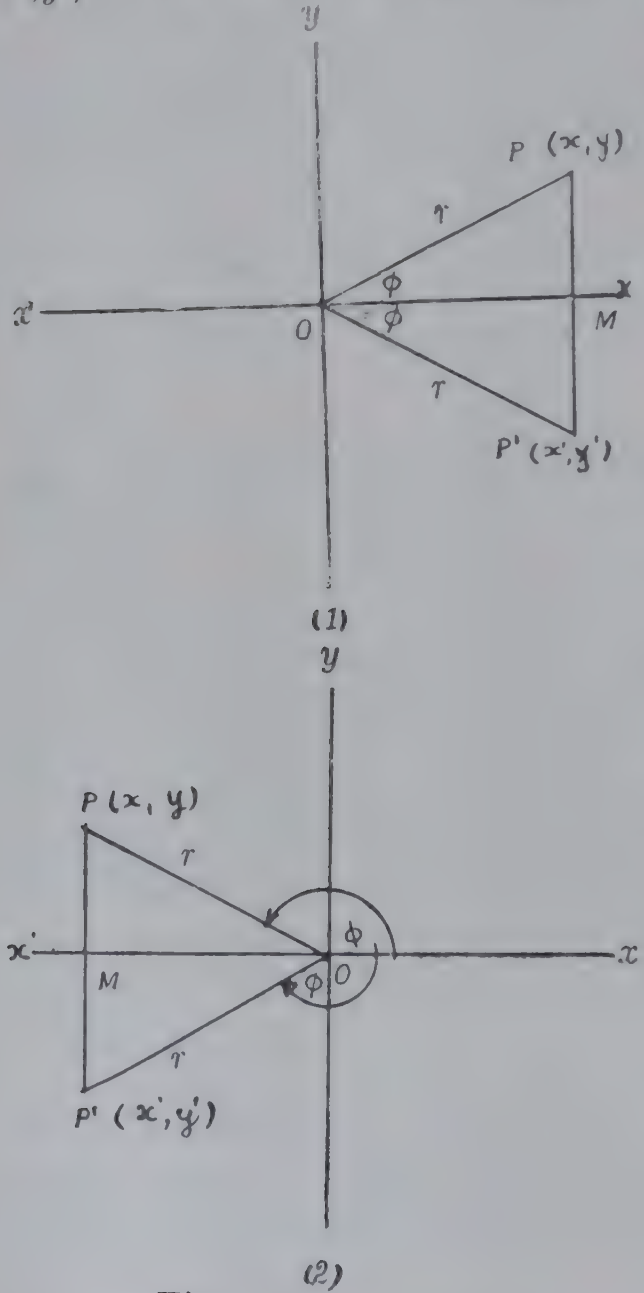


Fig. 8.4

x–axis. Care shou
be taken to assig
proper signs to t
segments. [For t
sake of completene
a full discussion
given here coveri
all possible valu
of ϕ. The stude
may, however co
fine himself to t
simplest case, whe
ϕ is a positive acu
angle].

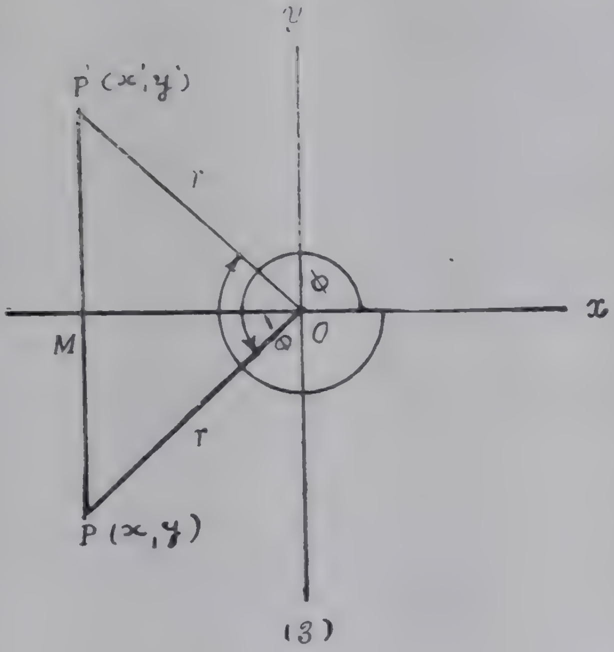
(*a*) *To connect t*
gonometric ratios
—ϕ with those of ϕ

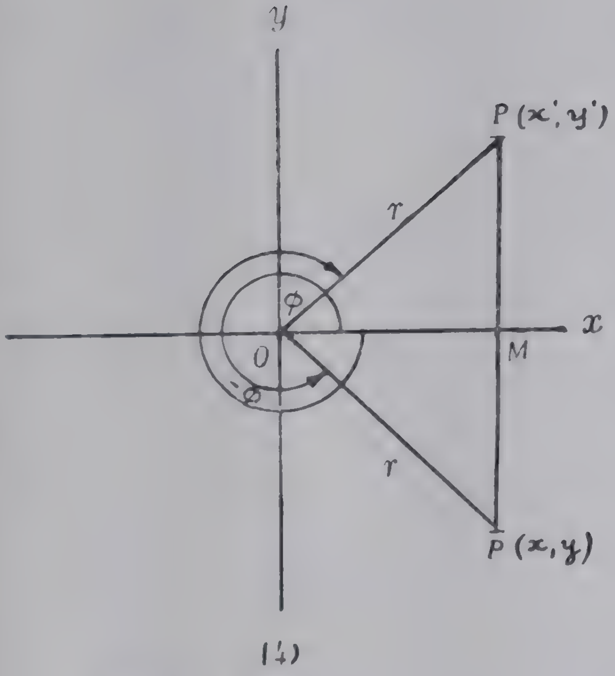
Here M' coincid
with M because t
$\triangle$s OMP and OM'
are congruent
construction.

$\therefore\ MP'=MP$
(in magnitude only

$\therefore\ y'=-y.\ x'=x$

ಇನ್ನು ಮುಂದಿನ ವಿವರಣೆಗಳಲ್ಲಿ OP ರೇಖೆಯು ϕ ಕೋನವನ್ನು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವುದು. Pಯು (x, y) ಬಿಂದು ಮತ್ತು $OP = r$ ಆಗಿರುವುದು. r ಸದಾ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದು. OP' ರೇಖೆಯ್ಯು ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು. OP'ನ್ನು OPಗೆ $(=r)$ ಸಮಾನವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. P' ಬಿಂದುವು (x', y') ಆಗಿದೆ. PM ಮತ್ತು $P'M'$ನ್ನು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬಗಳಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಜಾಗರೂಕತೆಯಿಂದ ನೀಡಬೇಕು. [ಪೂರ್ಣಚಿತ್ರವನ್ನು ಕೊಡುವ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ಇಲ್ಲಿ ϕಯ್ಯ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತಹ ವಾದವನ್ನು ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ϕಯ್ಯ ಅತಿ ಸುಲಭ ಬೆಲೆಯಾದ ಧನಲಘು ಕೋನವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಸಾಕು].





ಚಿತ್ರ 8.4

(a) — ϕಯ್ಯ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ϕಯ್ಯ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು.

$\triangle$ಃ OMP ಮತ್ತು $OM'P'$ ರಚನೆಯಿಂದ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುವುದರಿಂದ M ಮತ್ತು M'ಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗುವುವು.

$\therefore MP' = MP$ (ಪರಿಮಾಣದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ)

$\therefore y' = -y, \quad x' = x$

$$\sin(-\phi) = \frac{y'}{r} = \frac{-y}{r} = -\sin\phi$$

$$\cos(-\phi) = \frac{x'}{r} = \frac{x}{r} = \cos\phi$$

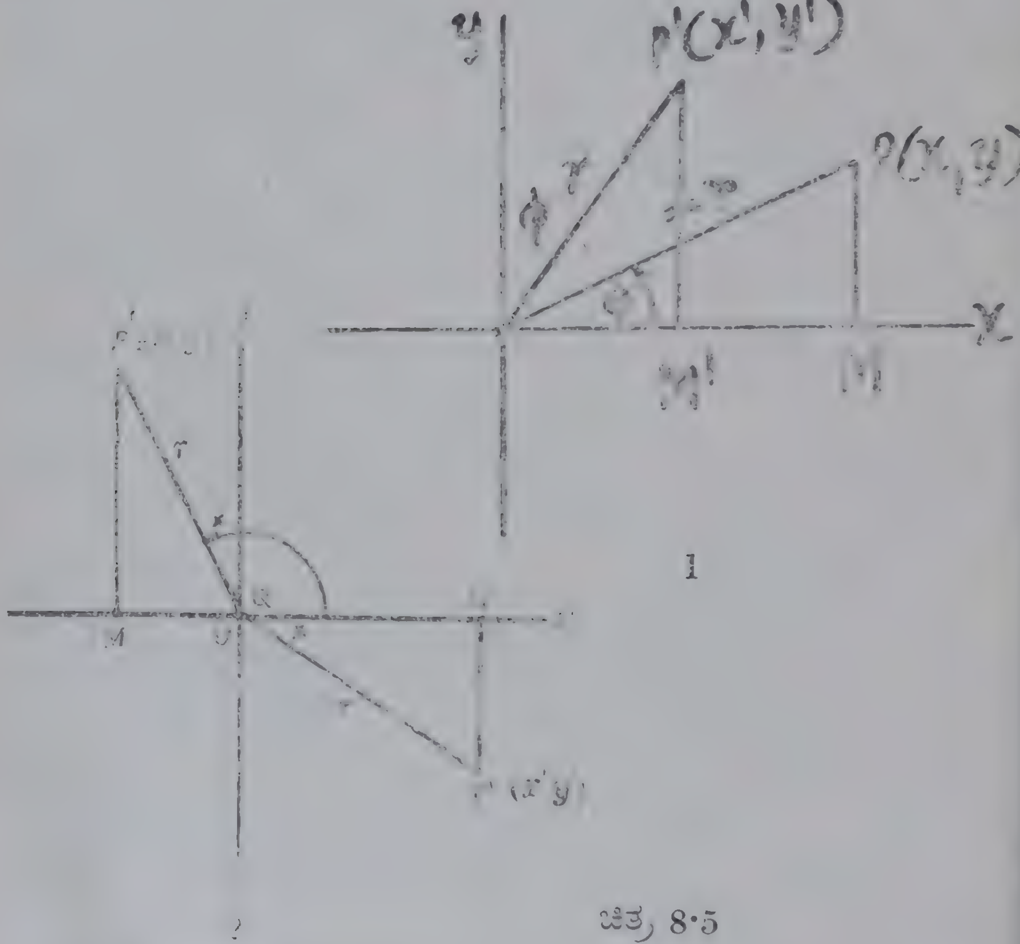
$$\tan(-\phi) = \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{x} = -\tan\phi$$

$$\therefore \cot(-\phi) = -\cot\phi$$

$$\therefore \sec(-\phi) = \sec\phi$$

$$\therefore \operatorname{cosec}(-\phi) = -\operatorname{cosec}\phi$$

(*b*) To connect trigonometric ratios of $\frac{\pi}{2} - \phi$ with those of ϕ.



ಚಿತ್ರ 8·5

[In the 2nd figure let $\phi = 90° + \times$.

$$\sin(-\phi) = \frac{y'}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin\phi$$

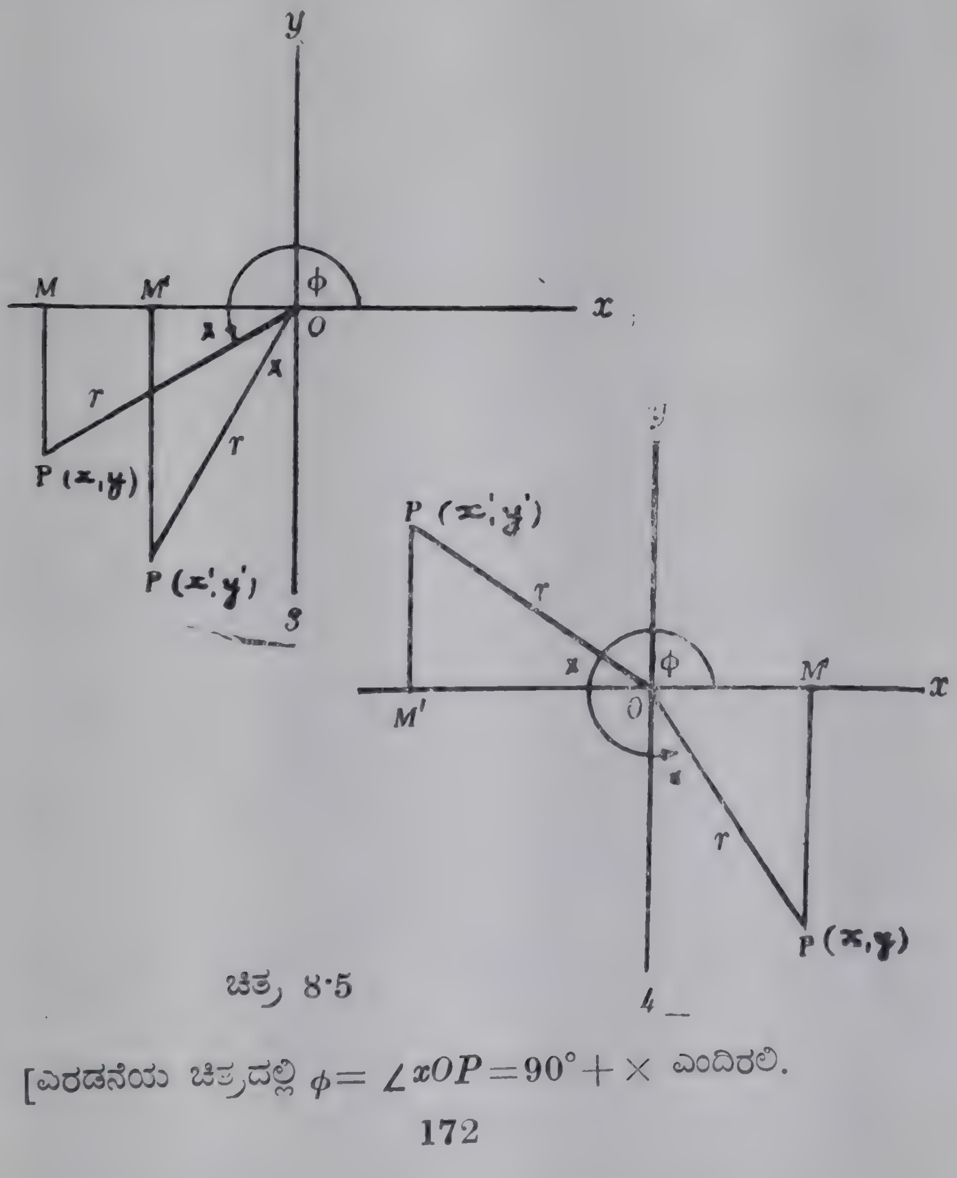
$$\cos(-\phi) = \frac{x'}{r} = \frac{x}{r} = \cos\phi$$

$$\tan(-\phi) = \frac{y'}{x'} = -\frac{y}{x} = -\tan\phi$$

$\therefore \cot(-\phi) = -\cot\phi$ $\qquad$ $\therefore \sec(-\phi) = \sec\phi$

$\operatorname{cosec}(-\phi) = -\operatorname{cosec}\phi$

(b) $\frac{\pi}{2}-\phi$ ಯ್ಯ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ϕ ಯ್ಯ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು.



ಚಿತ್ರ ೪·5

[ಎರಡನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\phi = \angle xOP = 90^\circ + \times$ ಎಂದಿರಲಿ.

OP' is drawn such that $\angle M'OP'$ (—ve sense) is $\times$. Then $\angle xOP'$ (+ve sense) $= 90° - \phi$.

Because $\angle xOP'$ (+ve) $= 360° - \times$

$$= 360° - (\phi - 90°)$$

$$= 360° + (90° - \phi)$$

360° being equivalent to one complete revolution is omitted. The same argument can be extended to the remaining figures also.]

all the figures,

$\angle OMP = \angle OM'P' = 90°$

$\angle POM = \angle OP'M'$

$\angle OP = OP' = r$

$\therefore$ The triangles OMP and $OM'P'$ are congruent.

$\therefore$ $\left.\begin{array}{l} OM = M'P' \\ MP = OM' \end{array}\right\}$ in magnitude and direction

$\therefore$ $x = y'$, $y = x'$

$$\therefore \ \sin(90° - \phi) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos\phi$$

$$\cos(90° - \phi) = \frac{x'}{r} = \frac{y}{r} = \sin\phi$$

$$\tan(90° - \phi) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{y} = \cot\phi$$

$$\cot(90° - \phi) = \tan\phi$$

$$\sec(90° - \phi) = \operatorname{cosec}\phi$$

$$\operatorname{cosec}(90° - \phi) = \sec\phi$$

(c) *To connect trigonometric ratios of* $\frac{\pi}{2} + \phi$ *with those of* ϕ.

$\angle M'O'P = \times$ (ಋಣಾತ್ಮಕ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ) ಆಗುವಂತೆ
OP' ನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಆಗ $\angle xOP'$ (+ve ದಿಶೆ) $= 90° - \phi$

ಏಕೆಂದರೆ, $\angle xOP'$ (+ve ದಿಶೆ) $= 360° - \times$

$= 360° - (\phi - 90°)$

$= 360° + (90° - \phi)$

360° ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಪರಿಭ್ರಮಣೆಯಾಗುವುದರಿಂದ ಅದನ್ನು ಬಿಟ್ಟುಬಿಡಬಹುದು. ಇದೇ ವಾದವನ್ನು ಉಳಿದ ಚಿತ್ರಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು].

ಎಲ್ಲ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯೂ,

$\angle OMP = \angle OM'P' = 90°$

$\angle POM = \angle OP'M'$

$OP = OP' = r$

$\therefore$ OMP ಮತ್ತು $OM'P'$ ತ್ರಿಕೋಣಗಳು ಸರ್ವ ಸಮ.

$\therefore \left. \begin{array}{l} OM = M'P' \\ MP = OM' \end{array} \right\}$ ಪರಿಮಾಣ ಮತ್ತು ದಿಶೆಗಳೆರಡರಲ್ಲಿಯೂ

$\therefore x = y',\ y = x'$

$$\sin (90° - \phi) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos \phi$$

$$\cos (90° - \phi) = \frac{x'}{r} = \frac{y}{r} = \sin \phi$$

$$\tan (90° - \phi) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{y} = \cot \phi$$

$$\cot (90° - \phi) = \tan \phi$$

$$\sec (90° - \phi) = \operatorname{cosec} \phi$$

$$\operatorname{cosec} (90° - \phi) = \sec \phi$$

(c) $\frac{\pi}{2} + \phi$ ಯ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ϕ ಯ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು.

[ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, 3 ನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ,

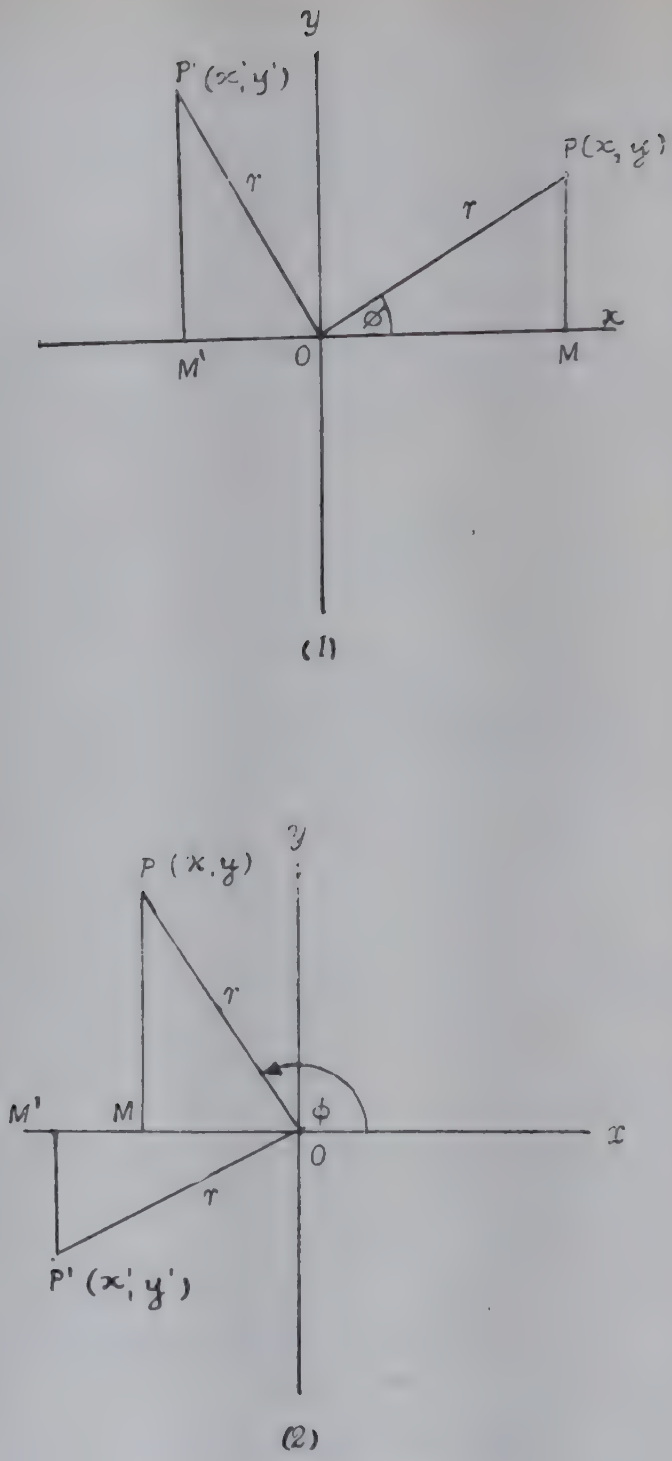
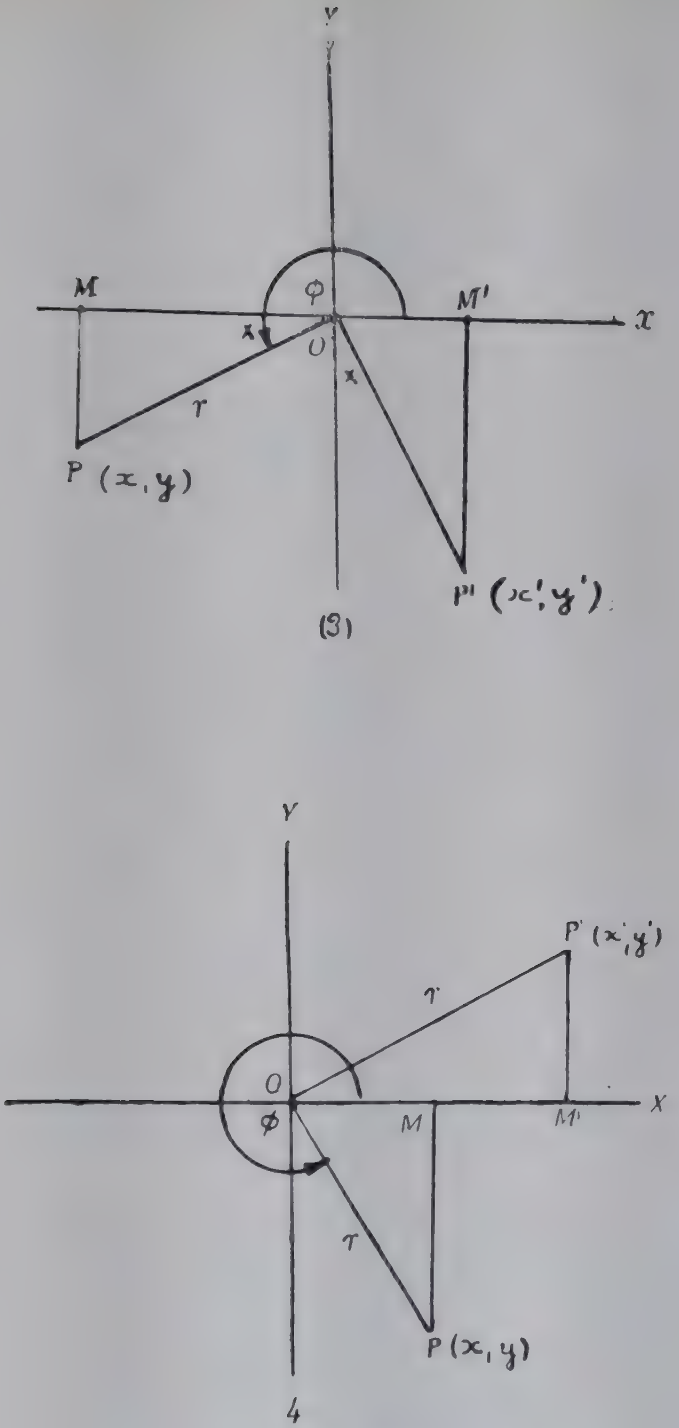


Fig. 8.6



ಚಿತ್ರ 8.6

For example in the 3rd figure

let $\phi = \angle xOP = 180 + \times$, say

OP' is drawn such that

$\angle xOP'$ (+ve) $= 270° + \times = 90° + (180° + \times) = 90° + \phi$

Therefore OP' bounds the angle $90° + \phi$. It is true in every figure].

In all the figures,

$\angle OMP = \angle OM'P' = 90°$

$\angle POM = \angle OP'M'$

$OP = OP' = r'$

$\therefore$ The triangles OMP and $OM'P'$ are congruent.

$\therefore$ $OM = M'P'$ in magnitude and direction.

$MP = OM'$ in magnitude only

$\therefore$ $x = y'$

$y = -x'$

$$\sin(90° + \phi) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos\phi$$

$$\cos(90° + \phi) = \frac{x'}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin\phi$$

$$\tan(90° + \phi) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{-y} = -\cot\phi$$

$$\cot(90° + \phi) = -\tan\phi$$

$$\sec(90° + \phi) = -\operatorname{cosec}\phi$$

$$\operatorname{cosec}(90° + \phi) = \sec\phi$$

$\phi = \angle xOP = 180° + \times$, ಎಂದಿರಲಿ.

xOP' (+ve ದಿಶೆ) $= 270° + \times$ ಆಗುವಂತೆ OP' ನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

$\angle xOP' = 270° + \times = 90° + (180° + \times) = 90° + \phi$
ಆದುದರಿಂದ OP', $(90° + \phi)$ ವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಇದು ಸರಿ.]

ಎಲ್ಲ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯೂ,

$\angle OMP = \angle OM'P' = 90°$

$\angle POM = \angle OP'M'$

$OP = OP' = r$

$\therefore OMP,\ OM'P'$ ತ್ರಿಕೋಣಗಳು ಸರ್ವ ಸಮ.

$\therefore OM = M'P'$ ಪರಿಮಾಣ ಮತ್ತು ದಿಶೆಗಳಲ್ಲಿ.

$MP = OM'$ ಪರಿಮಾಣದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ.

$\therefore x = y'$

$y = -x'$

$$\sin (90° + \phi) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos \phi$$

$$\cos (90° + \phi) = \frac{x'}{r} = \frac{-y}{r} = -\sin \phi$$

$$\tan (90° + \phi) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{-y} = -\cot \phi$$

$\cot (90° + \phi) = -\tan \phi$

$\sec (90° + \phi) = -\operatorname{cosec} \phi$

$\operatorname{cosec} (90° + \phi) = \sec \phi$

(d) *To connect trigonometric ratios of* $\pi + \phi$ *with those of* ϕ.

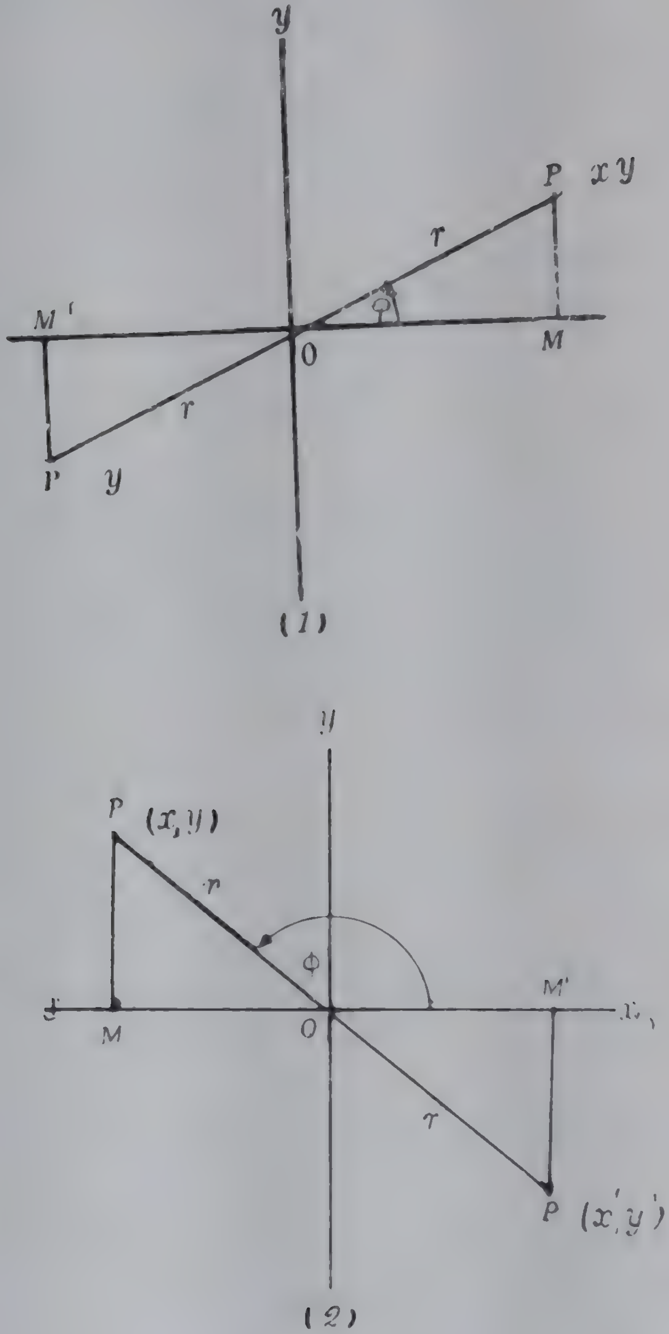
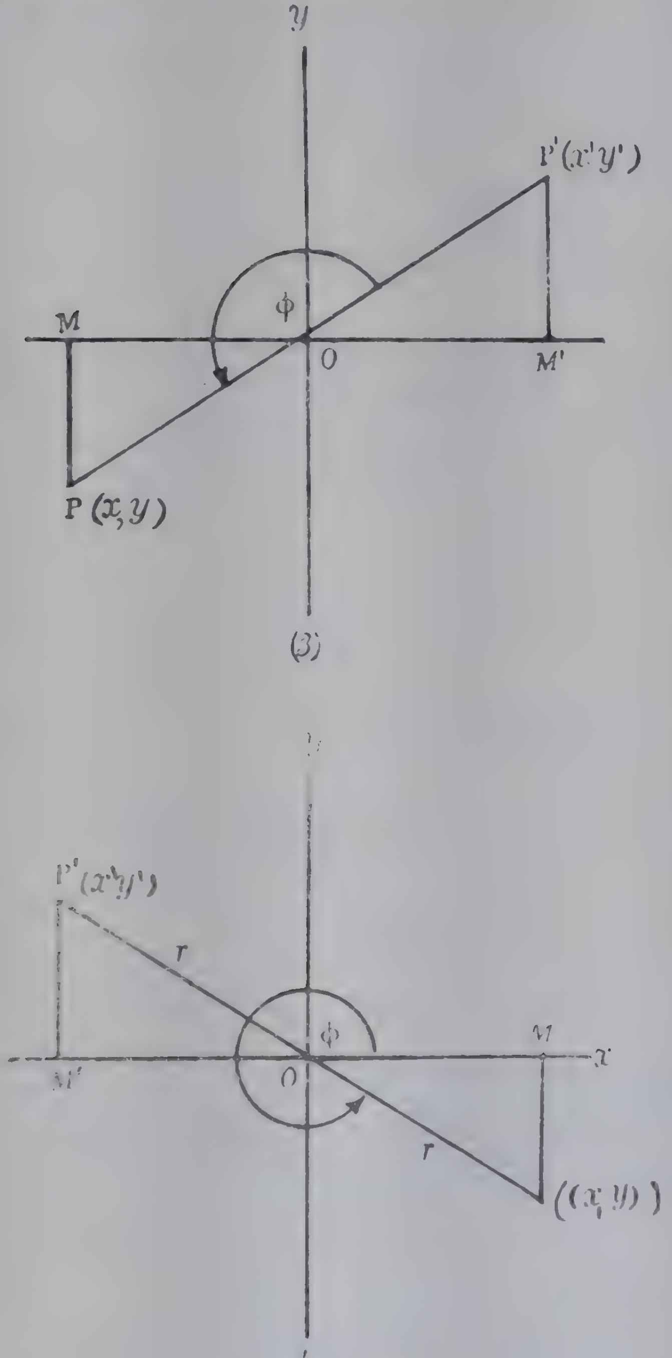


Fig. 8.7

(d) $\pi + \phi$ ಯ್ಯ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ϕ ಯ್ಯ ತ್ರಿಕೋಣ ಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು.



ಚಿತ್ರ 8.7

[In figure 4, for instance, $\phi = \angle xOP = 270^\circ + \times$, say OP' is drawn such that $\angle xOP' = 90^\circ + \times$. The $\angle xOP' = 90^\circ + \phi - 270^\circ = -360^\circ + (180^\circ + \phi)$. -360° bein one revolution (in the negative sense) can be omitted. There fore OP' bounds $180^\circ + \phi$].

In all the figures, POP' is a straight line.

$$\angle OM'P' = \angle OMP = 90^\circ$$

$$\angle M'OP' = \angle MOP$$

$$OP' = OP = r.$$

$\therefore$ The triangles $OM'P'$ and OMP are congruen

$\therefore$ $\left.\begin{array}{l} OM' = OM \\ M'P' = MP \end{array}\right\}$ in magnitude only.

$$\therefore x' = -x$$

$$y' = -y$$

$$\therefore \sin(180^\circ + \phi) = \frac{y'}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin\phi$$

$$\cos(180^\circ + \phi) = \frac{x'}{r'} = -\frac{x}{r} = -\cos\phi$$

$$\tan(180^\circ + \phi) = \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan\phi$$

$$\cot(180^\circ + \phi)\ \cot\phi$$

$$\sec(180^\circ + \phi) = -\sec\phi$$

$$\operatorname{cosec}(180^\circ + \phi) = -\operatorname{cosec}\phi.$$

(e) *The trigonometric ratios of the angles* $2\pi \pm \phi$ *o* *more generally the angles* $2n\pi \pm \phi$ where n is any intege *positive or negative are the same as those of the angles* $\pm\phi$ This is because $2n\pi$ is equivalent to n full revolution of OP.

Thus $\sin(2n\pi + \phi) = \sin\phi$

$$\cos(2n\pi + \phi) = \cos\phi, \text{ etc}$$

$$\sin(2n\pi - \phi) = \sin(-\phi) = -\sin\phi$$

$$\cos(2n\pi - \phi) = \cos(-\phi) = -\cos\phi, \text{ etc.}$$

[ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, 4ನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $\phi = \angle xOP = 270^\circ + \times$, ಎಂದಿರಲಿ. $\angle xOP' = 90^\circ + \times$ ಆಗಿರುವಂತೆ OP' ಯನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಆಗ $\angle xOP' = 90^\circ + \phi - 270^\circ = -360^\circ + (180^\circ + \varphi)$. -360° ಒಂದು ಪರಿಭ್ರಮಣೆ (ಪ್ರದಕ್ಷಿಣದಿಶೆಯಲ್ಲಿ) ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದನ್ನು ಬಿಟ್ಟುಬಿಡಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ OP' $(180^\circ + \phi)$ ವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತದೆ].

ಎಲ್ಲ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯೂ,

$$\angle OM'P' = \angle OMP = 90^\circ$$

$$\angle M'OP' = MOP$$

$$OP' = OP = r$$

$\therefore$ $OM'P'$ ಮತ್ತು OMP ತ್ರಿಕೋಣಗಳು ಸರ್ವಸಮ.

$\therefore$ $\left.\begin{array}{l} OM' = OM \\ M'P' = MP \end{array}\right\}$ ಪರಿಮಾಣದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ.

$$\therefore \quad x' = -x$$

$$y' = -y$$

$$\therefore \quad \sin(180^\circ + \phi) = \frac{y'}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin\phi$$

$$\cos(180^\circ + \phi) = \frac{x'}{r} = -\frac{x}{r} = -\cos\phi$$

$$\tan(180^\circ + \phi) = \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan\phi$$

$$\cot(180^\circ + \phi) = \cot\phi$$

$$\sec(180^\circ + \phi) = -\sec\phi$$

$$\text{cosec}(180^\circ + \phi) = -\text{cosec}\,\phi$$

(e) $2\pi \pm \phi$ ಕೋನಗಳ ಅಥವಾ ಇನ್ನೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $2n\pi \pm \phi$ (n ಎನ್ನುವುದು ಋಣ ಅಥವಾ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಕೋಣಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು $\pm\phi$ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಗೆ ಸಮ. $2n\pi$ ಕೋನವು OP ಯ n ಪೂರ್ಣ ಪರಿಭ್ರಮಣೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆ ನಿಜವಾಗುವುದು.

$\therefore \quad \sin(2n\pi + \phi) = \sin\phi$

$\cos(2n\pi + \phi) = \cos\phi$, ಇತ್ಯಾದಿ

$\sin(2n\pi - \phi) = \sin(-\phi) = -\sin\phi$

$\cos(2n\pi - \phi) = \cos(-\phi) = \cos\phi$, ಇತ್ಯಾದಿ.

8.5 The above results are summarised as below.

trigonometric ratio	$-\theta$	$\frac{\pi}{2}-\theta$	$\frac{\pi}{2}+\theta$	$\pi-\theta$	$\pi+\theta$	$2n\pi\pm$
sin	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	Equal trigono metric ratios of ang $\pm\theta$
cos	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	
tan	$-\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	
cot	$-\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot\theta$	$\cot\theta$	
sec	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$-\operatorname{cosce}\theta$	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$	
cosec	$-\operatorname{cosec}\theta$	$\sec\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$-\operatorname{cosec}\theta$	

8·3 *Exercises*

1. Express in the simplest form :—
   (*a*) cosec 225°, (*b*) sec 225° ;
   (*c*) tan 240°, (*d*) cot 240°
   (*e*) sin (—300°) ; (*f*) tan (—450°) ;
   (*g*) $\cot\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$; (*h*) $\operatorname{cosec}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$;
   (*i*) $\sec\left(\frac{13\pi}{3}\right)$; (*j*) $\cot\left(-\frac{7\pi}{2}\right)$;
   (*k*) $\tan(180°+A)\sin(90°+A)\sec(90°-A)$.

2. Show that :—

$$\frac{\sin(180°-A)}{\tan(180°+A)}\ \frac{\cot(90°-A)}{\tan(90°+A)}\ \frac{\cos(360°-A)}{\sin(-A)}=\sin A$$

8.5 ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸಾರಾಂಶವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಕೋಣ ತೀಯ ಮಾಣ	$-\theta$	$\frac{\pi}{2}-\theta$	$\frac{\pi}{2}+\theta$	$\pi-\theta$	$\pi+\theta$	$2n\pi\pm\theta$
sin	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$\pm\theta$ ಕೋಣಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಗೆ ಸಮ
cos	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	
tan	$-\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	
cot	$-\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot\theta$	$\cot\theta$	
sec	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$-\operatorname{cosec}\theta$	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$	
cosec	$-\operatorname{cosec}\theta$	$\sec\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$-\operatorname{cosec}\theta$	

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 8.3

1. ಅತ್ಯಂತ ಸುಲಭರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ,—

(a) cosec 225° ; (b) sec 225° ; (c) tan 240° ;

(d) cot 240°

(e) sin (—300°); (f) tan (—450°);

(g) $\cot\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; (h) $\operatorname{cosec}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$;

(i) $\sec\left(\frac{13\pi}{3}\right)$; (j) $\cot\left(\frac{-7\pi}{2}\right)$;

(k) $\tan(180^\circ+A)\sin(90^\circ+A)\sec(90^\circ-A)$

2. $$\frac{\sin(180^\circ-A)}{\tan(180^\circ+A)}\;\frac{\cot(90^\circ-A)}{\tan(90^\circ+A)}\;\frac{\cos(360^\circ-A)}{\sin(-A)}=\sin A$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3 When $\alpha = \frac{11\pi}{4}$ find the numerical value of

$$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 2\tan\alpha - \sec^2\alpha$$

4 Prove that—

$$\cot A + \tan(180^\circ + A) + \tan(90^\circ + A) + \tan(360^\circ - A) = 0.$$

5 In a triangle ABC prove that—

$$\sin A = \sin(B+C)$$

$$\cos A = -\cos(B+C)$$

$$\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B+C}{2}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \cot\frac{B+C}{2}$$

6 If $\angle A = 18^\circ$ prove that $\cos 2A = \sin 3A$

7 Simplify :—

$$\sin(-120^\circ)\cos 240^\circ \tan 450^\circ \sec 300^\circ.$$

8·6 Periodicity of Trigonometric Functions.—

In the last chapter we have seen that

$$\sin(2n\pi \pm \theta) = \sin(\pm\theta),$$

$$\cos(2n\pi \pm \theta) = \cos(\pm\theta), \text{ etc.}$$

The values of the trigonometric functions are thus see[n] to repeat when the angle $(\pm\theta)$ is increased by $2n\pi$ or an[y] multiple of 2π. For this reason we say the trigonometri[c] functions are *periodic*. In the case of $\sin\theta$, $\cos\theta$, sec[θ] and cosec θ the period is 2π; but for $\tan\theta$ and cot[θ] the period is π as $\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$ and $\cot(\pi+\theta) = \cot\theta$.

The changes in the values of the trigonometric func[-]tions can be conveniently represented by a graph. Her[e] the x-axis measures the angles—so it is called th[e] θ-axis. The y-axis measures the values of the trigo[-]nometric function.

By a reference to the Tables (Natural Sines, Natura[l] Cosines, etc.) the values of all trigonometric function[s] can be determined. These are tabulated as shown below.

3 $\alpha = \dfrac{11\pi}{4}$ ಎಂದಿದ್ದರೆ

$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 2\tan\alpha - \sec^2\alpha$ ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4 $\cot A + \tan(180^\circ + A) + \tan(90^\circ + A)$
$+ \tan(360^\circ - A) = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

5 ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿರಿ—

$$\sin A = \sin(B+C)$$
$$\cos A = -\cos(B+C)$$
$$\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B+C}{2}$$
$$\tan\frac{A}{2} = \cot\frac{B+C}{2}$$

6 $\angle A = 18^\circ$ ಆದರೆ $\cos 2A = \sin 3A$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

7 ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ—

$$\sin(-120^\circ)\cos 240^\circ \tan 450^\circ \sec 300^\circ$$

8·6 ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಅವಧಿನಿಯಮ

ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ

$$\sin(2n\pi \pm \theta) = \sin(\pm\theta)$$
$$\cos(2n\pi \pm \theta) = \cos(\pm\theta)$$

ಎಂದು ಮುಂತಾಗಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

ಹೀಗೆ ಕೋನದ $(\pm\theta)$ ಬೆಲೆಯನ್ನು $2n\pi$ ಅಥವಾ 2πಯ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಗಣಕದಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೊಳ್ಳುವುವು ಎಂದು ಅರಿತಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಕಾರಣದಿಂದ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಅವಧಿಯಿರುವಂಥವು (ಅವಧಿಯುತ) ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. $\sin\theta$ $\cos\theta$, $\sec\theta$ ಮತ್ತು $\operatorname{cosec}\theta$ ಇವುಗಳ ಅವಧಿ 2π; ಆದರೆ $\tan\theta$ ಮತ್ತು $\cot\theta$ ಗಳ ಅವಧಿ π. ಏಕೆಂದರೆ $\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$, ಮತ್ತು $\cot(\pi+\theta) = \cot\theta$.

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಆಗುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗ್ರಾಫ್ ಮೂಲಕ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ x—ಅಕ್ಷವು ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆಯುವುದು—ಆದುದರಿಂದ ಅದನ್ನು θ— ಅಕ್ಷ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. y—ಅಕ್ಷವು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅಳೆಯುವುದು.

'ಟೇಬಲ್ಸ್'ನ್ನು ನೋಡಿ (Natural Sines, Natural Cosines ಇತ್ಯಾದಿ) ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನೂ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಅವುಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕಾಣಿಸಿದಂತೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

(i) $y = \sin\theta$

$\theta=0°$	15°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180
$y=0°$	0.2558	0.5000	0.7071	0.8660	1	0.8660	0.7071	0.5000	0

It may be noted that—

(*a*) sin 120° = sin60°, sin 330° = —sin30°, etc.

(*b*) The maximum value of $\sin\theta$ is +1 and the minimum value is — 1.

(*c*) There is no break in the values of $\sin\theta$.

The graph of $y = \sin\theta$ is as shown below.

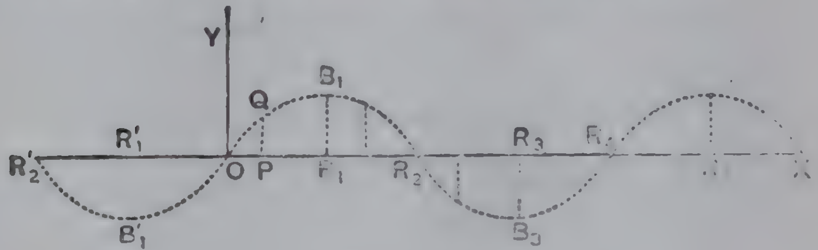


Fig. 8.8

It may be noted from the graph that (*a*) the sine function is positive when θ is between 0 and 180° ; and it is negative when θ is between 180° and 360° ; and

(*b*) the curve repeats itself after every 360° and so the period of $\sin\theta$ is 360° or $2\pi^c$.

(ii) $y = \cos\theta$

$\theta=$	0	15°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
$y=$	1	0.9659	0.8660	0.7071	0.5000	0	0.5000	—0.7071	—0.8660

It may be noted that—

(*a*) the maximum value of $\cos\theta$ is +1 and the minimum value is —1 ;

(*b*) there is no break in the values of $\cos\theta$;

(i) $y=\sin\theta$

210°	240°	270°	300°	330°	360°
−0.5000	−0.8660	−1	−0.8660	−0.5000	0

ಈ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು—

(*a*) $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$, $\sin 330^\circ = -\sin 30^\circ$, ಇತ್ಯಾದಿ

(*b*) $\sin\theta$ ದ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $+1$ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ -1.

(*c*) $\sin\theta$ ದ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ (ತುಂಡಾಗುವಿಕೆ) ಇಲ್ಲ.

$y=\sin\theta$ ಇದರ ಗ್ರಾಫನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. (ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಭಾಗದ ಚಿತ್ರ 8.8)

ಗ್ರಾಫ್‌ನಿಂದ ತಿಳಿಯಬಹುದಾದ ಅಂಶಗಳು—

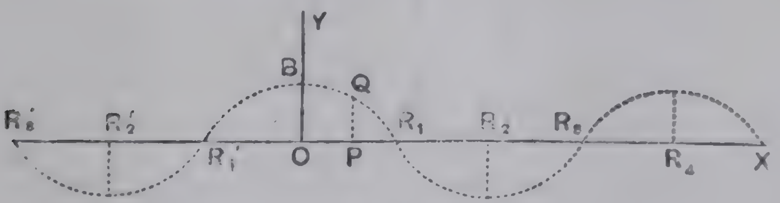
(*a*) θವು 0° ಮತ್ತು 180° ಮಧ್ಯೆ ಇರುವಾಗ sine ಉತ್ಪನ್ನವು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದು ; ಮತ್ತು θವು 180° ಮತ್ತು 360° ಮಧ್ಯೆ ಇರುವಾಗ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದು.

(*b*) sine ನ ವಕ್ರರೇಖೆಯು ಪ್ರತಿ 360° ಆದನಂತರ ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ $\sin\theta$ ದ ಅವಧಿ 360° ಅಥವಾ $2\pi^c$.

(ii) $y=\cos\theta$

180°	210°	225°	270°	300°	330°	360°
−1	−0.8660	−0.7071	0	0.5000	0.8660	1

Cosine-Graph.



ಚಿತ್ರ 8.9

ಈ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು—

(*a*) $\cos\theta$ ದ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $+1$ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ—1;

(*b*) $\cos\theta$ ದ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಇಲ್ಲ ;

(*c*) the function is positive between -90° and 90°, and 270° and 450° ; and negative between 90° and 270°.

(*d*) the curve repeats itself after every 360° and so its period is 360° or $2\pi^c$. [See fig. 8·9 Kannada]

(iii) $y = \tan\theta$.

Before we tabulate the values of $\tan\theta$ for different values of θ we shall note the following facts about the function—

(*a*) It has no finite maximum or minimum value.

(*b*) In the vicinity of 90° and 270° $\tan\theta$ suddenly shoots to infinitely large values.

(*c*) As θ approaches 90° from below $\tan\theta$ takes positively large values ; at $\theta = 90^\circ$ $\tan\theta$ is infinite.

(*d*) when θ is slightly greater than 90°, $\tan\theta$ is negative and its magnitude is large. As θ increases the value of $\tan\theta$ increases from negatively large values to 0 and so on.

(*e*) thus at $\theta = 90^\circ$ and 270° there is a break in the graph of $y = \tan\theta$

(*f*) the period of $\tan\theta$ is π^c.

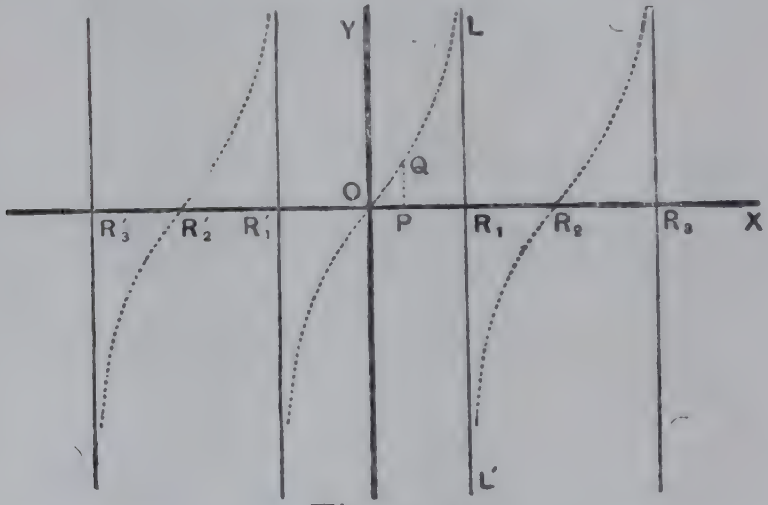


Fig. 8.10

θ =	0	15°	30°	45°	60°	89°	90°	91°	120°	135
y =	0	0·2679	0·5774	1	1·7321	57·29	∞	—57·29	—1·7321	—

(c) cos θ ವು —90° ಮತ್ತು 90° ಮಧ್ಯೆ ಮತ್ತು 270° ಮತ್ತು 450° ಮಧ್ಯೆ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ, 90° ಮತ್ತು 270° ಮಧ್ಯೆ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ ಇದೆ.

(d) cos θ ದ ವಕ್ರರೇಖೆಯು ಪ್ರತಿ 360° ಆದನಂತರ ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ cos θ ದ ಅವಧಿ 360° ಅಥವಾ $2\pi^c$.

(iii) $y = \tan\theta$

θ ಕೋನದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ tan θ ದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡುವುದರ ಮೊದಲು tan θ ವನ್ನು ಕುರಿತ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

(a) ಅದಕ್ಕೆ ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಗರಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯಿಲ್ಲ.

(b) 90° ಮತ್ತು 270° ಯ ಸಾಮೀಪ್ಯದಲ್ಲಿ tan θ ವು ಥಕ್ಕನೆ ಅಪರ್ಯಾಪ್ತ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಏರುವುದು.

(c) ಕಡಿಮೆ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ θ ವು 90° ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ tan θ ವು ಧನ ಅಪರ್ಯಾಪ್ತ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದುವುದು ; $\theta = 90°$ ಆದಾಗ tan θ ವು ಅಪರ್ಯಾಪ್ತ.

(d) θ ವು 90° ಗಿಂತ ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚು ಬೆಲೆ ಪಡೆದಾಗ tan θ ವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದು; ಮತ್ತು ಅದರ ನಿಜ ಬೆಲೆ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದು. θ ವು ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆ tan θ ವು ಋಣ ಅಪರ್ಯಾಪ್ತ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ 0 ಯವರೆಗೆ ಏರಿ ಮತ್ತೂ ಮುಂದುವರಿಯುವುದು.

(e) ಹೀಗೆ $\theta = 90°$ ಮತ್ತು 270° ಆದಾಗ $y = \tan\theta$ ಇದರ ಗ್ರಾಫಿನಲ್ಲಿ ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯಿದೆ.

(ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಭಾಗದ ಚಿತ್ರ 8.10)

(f) tan θ ದ ಅವಧಿ π^c

θ =	150°	180°	210°	225°	269°	270°	271°	360°
y =	—0.5774	0	0.5774	1.0000	57.29	∞	—57.29	0

Exercises 8.4

1 Draw the graphs of

(*a*) $\cot\theta$; (*b*) $\sec\theta$; (*c*) $\operatorname{cosec}\theta$ when θ changes from 0° to 360°.

2 Calcuate the periods of

(*a*) $\sin 2\theta$; (*b*) $\sin 3\theta$; (*c*) $\sin n\theta$; (*d*) $\tan 2\theta$; (*e*) $\tan 30$; (*f*) $\tan n\theta$.

3 From the graph of $y = \cos\theta$, find the values of θ satisfying $y = 0.7000$.

8.7 Orthogonal Projection :

Let AB and CD be two straight lines inclined at an angle a to one another. Draw AL, BM perpendiculars to CD. Then LM is called the orthogonal projection (or simply the projection) of AB on CD. We observe that

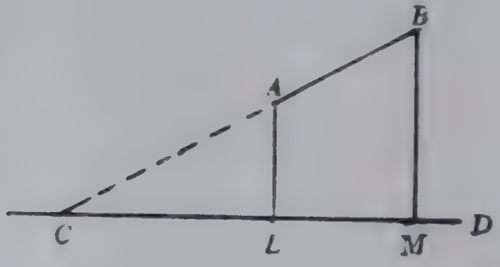


Fig. 8.11

$$LM = AB \cos a.$$

Therefore the projection of a given segment of a line on another given line is the product of the length of the segment and the *cosine* of the angle between the lines

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 8·4

1 θ ವು 0°ಯಿಂದ 360° ಯುವರೆಗೆ ಬದಲಾಗುವಾಗ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗ್ರಾಫುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ—

(*a*) $\cot\theta$; (*b*) $\sec\theta$; (*c* $\operatorname{cosec}\theta$

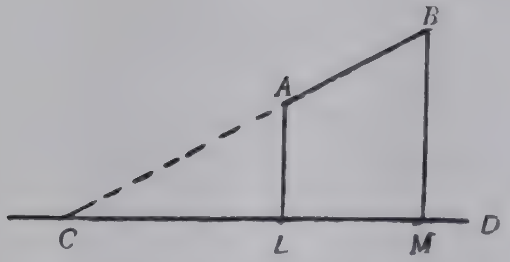
2 ಇವುಗಳ ಅವಧಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ—

(*a*) $\sin 2\theta$; (*b*) $\sin 3\theta$; (*c*) $\sin n\theta$;
(*d*) $\tan 2\theta$; (*e*) $\tan 3\theta$; (*f*) $\tan n\theta$

3 $y = \cos\theta$ ಇದರ ಗ್ರಾಫನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ θದ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $y = 0{\cdot}7000$ ಆಗುವುದೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

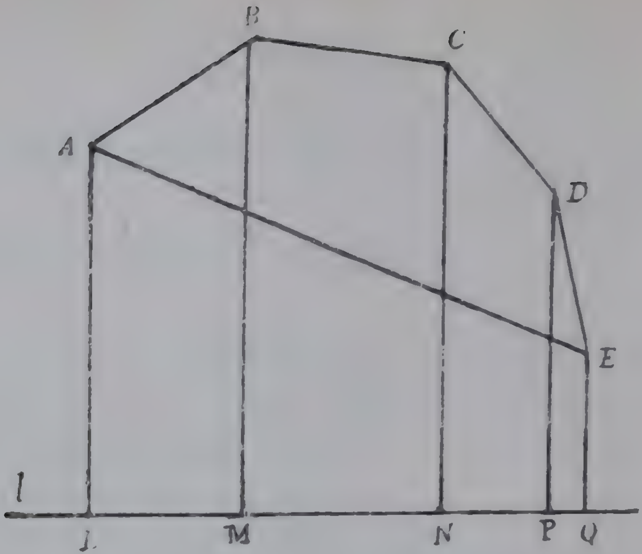
8·7 ಲಂಬವಿಕ್ಷೇಪ

AB ಮತ್ತು CD ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ α ಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಾಗಿರಲಿ. AL, BMನ್ನು CD ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಆಗ LMನ್ನು CDಯ ಮೇಲೆ ABಯ ಲಂಬವಿಕ್ಷೇಪ (ಅಥವಾ ಸುಲಭವಾಗಿ ವಿಕ್ಷೇಪ ಎಂದು) ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $LM = AB\cos\alpha$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.



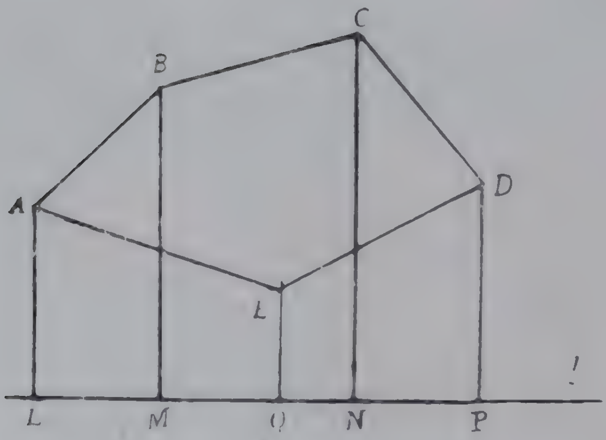
ಚಿತ್ರ 8.11

ಆದುದರಿಂದ ಒಂದು ದತ್ತರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದು ದತ್ತ ರೇಖಾಖಂಡದ ವಿಕ್ಷೇಪವು ಆ ರೇಖಾಖಂಡದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅವೆರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನದ *cosine* ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ.



1

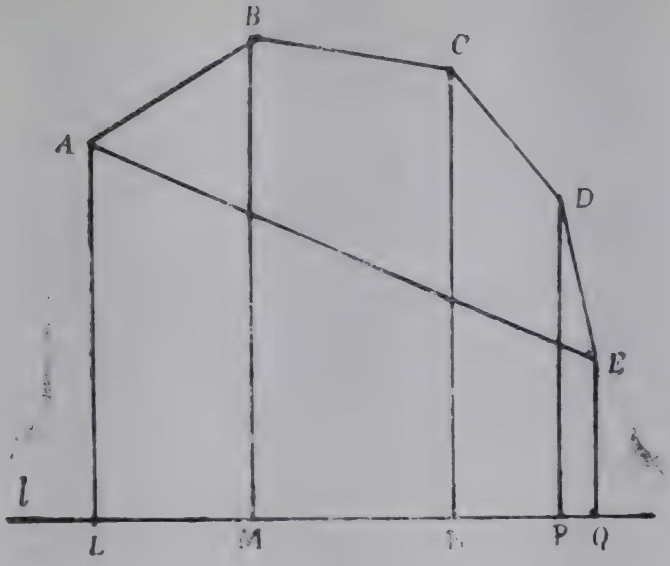
Fig. 8.12



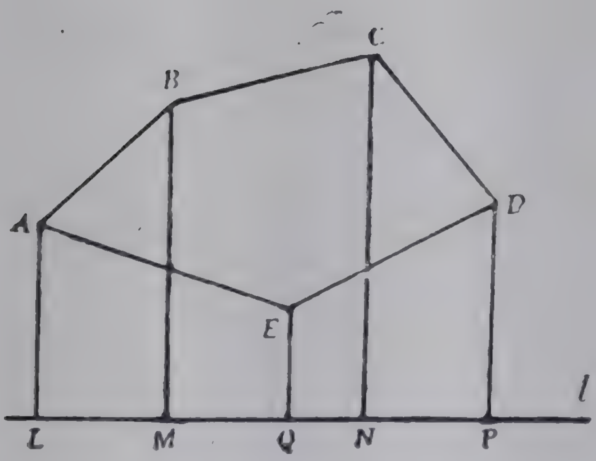
2

Fig. 8.13

8.8 Consider the broken line $ABCDE$. The projections of its segments AB, BC, CD, DE on a given line l are LM, MN, NP and PQ respectively.



ಚಿತ್ರ 8.12



ಚಿತ್ರ 8.13

8·8 *ABCDE* ಎಂಬ ತುಂಡಾದ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಅದರ [illegible]ಗಳಾದ *AB*, *BC*, *CD*, *DE* ಇವುಗಳ ವಿಕ್ಷೇಪಗಳು (l ಎಂಬ ದತ್ತರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ, ಕ್ರಮವಾಗಿ *LM*, *MN*, *NP* ಮತ್ತು *PQ* ಆಗಿವೆ.

$$\text{Now}\quad LM+MN+NP+PQ = LQ \quad (\text{fig } 8.12)$$

$$LM+MN+NP+PQ=(LM+MN+NP)-QP$$

$$= LP - QP = LQ, \quad (\text{fig } 8.13).$$

But the projection of the line AE on l is also equal to LQ

Therefore the projection of any straight line on any given straight line is equal to the algebraic (paying due attention to the signs of the projections) sum of the projections of the segments of the same broken line.

ಈಗ $LM + MN + NP + PQ = LQ$ (ಚಿತ್ರ 8.12)

$$LM + MN + NP + PQ$$
$$= (LM + MN + NP) - QP = LP - QP = LQ$$
(ಚಿತ್ರ 8.13)

ಆದರೆ l ಮೇಲೆ AEಯ ವಿಕ್ಷೇಪವೂ LQ ಆಗಿದೆ.

ಆದುದರಿಂದ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ವಿಕ್ಷೇಪವು ಅದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ತುಂಡಾದ ರೇಖೆಯ ಖಂಡಗಳ ವಿಕ್ಷೇಪಗಳ (ವಿಕ್ಷೇಪಗಳ ದಿಶೆಗಳಿಗೆ ಗಮನವೀಯಬೇಕು) ಬೈಜಿಕ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ.

CHAPTER 9

9.1 Compound Angles—

If A and B are two given angles $A+B$ and $A-B$ are called compound angles. There are certain relationships connecting the trigonometric ratios of these compound angles with those of A and B.

9.2 We shall now prove—

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

Let a revolving straight line start from OX, revolve about O in the positive direction through an angle A and assume the position OL. Let it further revolve through an angle B and assume the position OM.

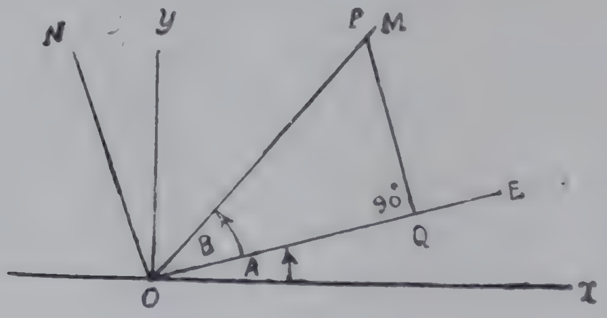


Fig. 9.1

$\therefore \angle XOL = A,$

$\angle LOM = B$ so that

$\angle XOM = A+B$

ಅಧ್ಯಾಯ 9

ಸಂಯುಕ್ತ ಕೋನಗಳು

9.1 ಸಂಯುಕ್ತ ಕೋನಗಳು

A ಮತ್ತು B ಎಂಬುವು ಎರಡು ದತ್ತ ಕೋನಗಳಾದರೆ $A+B$ ಮತ್ತು $A-B$ ಇವುಗಳನ್ನು ಸಂಯುಕ್ತ ಕೋನಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂಯುಕ್ತ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು A ಮತ್ತು B ಇವುಗಳ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಗೆ ಹೊಂದಿಸುವ ಸಂಬಂಧಗಳಿವೆ.

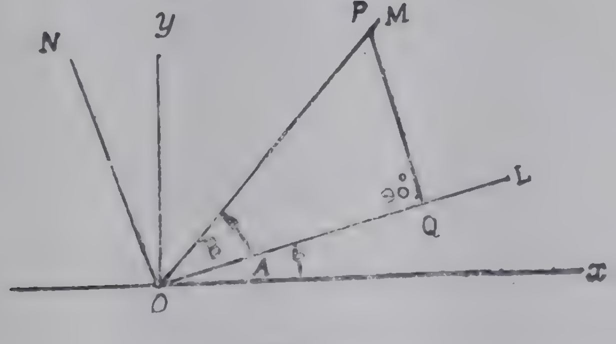
9.2 ನಾವೀಗ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ.—

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

ಒಂದು ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯು OX ನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, O ವಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ A ಕೋನವನ್ನು ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ OL ಎಂಬ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಬರಲಿ. ಅದು ಅಲ್ಲಿಂದ ಮುಂದಕ್ಕೆ B ಕೋನವನ್ನು ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ OM ಎಂಬ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಬರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 9.1

$\therefore \quad \angle XOL = A,$

$\angle LOM = B,$ ಆದ್ದರಿಂದ

$\angle XOM = A+B$

Take any point P on OM. Draw PQ perpendicular to OL. Draw ON parallel to QP.

Now, projection of OP on OY = Algebraic sum of the projections of the segments of the broken line OQP.

$$\therefore\ OP\cos(90° - A - B) = OQ\cos(90° - A) + QP\cos A.$$

$$\therefore\ OP\sin(A+B) = OP\cos B\sin A + OP\sin B\cos A$$

$$\therefore\ \sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

Again, projection of OP on OX = Algebraic sum of the projections of the segments of the broken line OQP.

$$\therefore\ OP\cos(A+B) = OQ\cos A - QP\cos(90° - A)$$
$$= OP\cos B\cos A - OP\sin B\sin A$$

$$\therefore\ \cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\sin A\cos B + \cos A\sin B}{\cos A\cos B - \sin A\sin B}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin A\cos B + \cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B - \sin A\sin B}{\cos A\cos B}}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

9.3. The following deductions may be noted. First we rewrite the three formulae :—

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B \qquad (1)$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B \qquad (2)$$

OMನ ಮೇಲೆ P ಎಂಬ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. PQ ವನ್ನು OLಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ON ನ್ನು OP ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಈಗ, OY ಮೇಲೆ OP ಯ ವಿಕ್ಷೇಪ $= OQP$ ತುಂಡಾದ ರೇಖೆಯ ಖಂಡಗಳ ವಿಕ್ಷೇಪಗಳ ಬೈಜಿಕ ಮೊತ್ತ.

$$\therefore\ OP \cos (90^\circ - A - B) = OQ \cos (90^\circ - A) + QP \cos A$$

$$\therefore\ OP \sin (A+B) = OP \cos B \sin A + OP \sin B \cos A$$

$$\therefore\ \sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

ಪುನಃ. OX ಮೇಲೆ OP ಯ ವಿಕ್ಷೇಪ $= OQP$ ತುಂಡಾದ ರೇಖೆಯ ಖಂಡಗಳ ವಿಕ್ಷೇಪಗಳ ಬೈಜಿಕ ಮೊತ್ತ.

$$\therefore\ OP \cos (A+B) = OQ \cos A - QP \cos (90^\circ - A)$$
$$= OP \cos B \cos A - OP \sin B \sin A$$

$$\therefore\ \cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan (A+B) = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\dfrac{\cos A \cos B - \sin A \sin B}{\cos A \cos B}}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

9·3 ಈ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವ ಉಪಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕು. ಮೊದಲು ನಾವು ಮೂರು ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಪುನಃ ಬರೆಯೋಣ.

$$\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \qquad (1)$$

$$\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \qquad (2)$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \tag{3}$$

Change 'B' to '$-B$'.

$$\sin(A-B) = \sin A \cos(-B) + \cos A \sin(-B)$$
$$= \sin A \cos B - \cos A \sin B \tag{4}$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos(-B) - \sin A \sin(-B)$$
$$= \cos A \cos B + \sin A \sin B \tag{5}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A + \tan(-B)}{1 - \tan A \tan(-B)}$$
$$= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} \tag{6}$$

In (1), (2) and (3) put $B = A$

$$\sin 2A = \sin A \cos A + \cos A \sin A$$
$$= 2 \sin A \cos A \tag{7}$$

$$\cos 2A = \cos A \cos A - \sin A \sin A$$
$$= \cos^2 A - \sin^2 A$$
$$= 1 - 2 \sin^2 A \tag{8}$$
$$= 2 \cos^2 A - 1 \tag{8}$$

$$\tan 2A = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A}$$
$$= \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \tag{9}$$

In (1), (2) and (3) put $B = 2A$

$$\sin 3A = \sin A \cos 2A + \cos A \sin 2A$$
$$= \sin A (1 - 2 \sin^2 A) + 2 \sin A \cos^2 A$$
$$= \sin A - 2 \sin^3 A + 2 \sin A (1 - \sin^2 A)$$
$$= 3 \sin A - 4 \sin^3 A \tag{10}$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} \qquad (3)$$

'B' ಯನ್ನು '$-B$'ಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ.

$$\sin(A-B)=\sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B)$$
$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B \qquad (4)$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos(-B)-\sin A\sin(-B)$$
$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B \qquad (5)$$

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A+\tan(-B)}{1-\tan A\tan(-B)}$$

$$=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B} \qquad (6)$$

(1), (2) ಮತ್ತು (3) ರಲ್ಲಿ $B=A$ ಎಂದು ಬರೆಯಿರಿ.

$$\sin 2A=\sin A\cos A+\cos A\sin A$$
$$=2\sin A\cos A \qquad (7)$$

$$\cos 2A=\cos A\cos A-\sin A\sin A$$
$$=\cos^2 A-\sin^2 A \qquad (8)$$

$$=1-2\sin^2 A \qquad (8)$$

$$=2\cos^2 A-1 \qquad (8)$$

$$\tan 2A=\frac{\tan A+\tan A}{1-\tan A\tan A}$$

$$=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} \qquad (9)$$

(1), (2), (3) ರಲ್ಲಿ $B=2A$ ಎಂದು ಬರೆಯಿರಿ.

$$\sin 3A=\sin A\cos 2A+\cos A\sin 2A$$
$$=\sin A(1-2\sin^2 A)+\cos A\, 2\sin A\cos A$$
$$=\sin A-2\sin^3 A+2\sin A(1-\sin^2 A)$$
$$=3\sin A-4\sin^3 A \qquad (10)$$

$$\cos 3A = \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin A$$
$$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin^2 A \cos A$$
$$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A(1-\cos^2 A)$$
$$= 4\cos^3 A - 3\cos A. \qquad (11)$$

(1) + (4) and (1) — (4) give

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$+ \sin A \cos B - \cos A \sin B = 2\sin A \cos B \qquad (12)$$
$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B \qquad (13)$$

(2) + (5) and (2)—(5) give

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$
$$+ \cos A \cos B + \sin A \sin B = 2\cos A \cos B \qquad (14)$$
$$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2\sin A \sin B \qquad (15)$$
$$\therefore \cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A \sin B \qquad (15)$$

In formulae (12) to (15) we put $A+B=C$, $A-B=D$ so that

$$A = \frac{C+D}{2}, \qquad B = \frac{C-D}{2},$$

$$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \qquad (16)$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \qquad (17)$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \qquad (18)$$

$$\cos 3A = \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin A$$
$$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin^2 A \cos A$$
$$= 2\cos^3 A - 2\cos A - 2(1-\cos^2 A)\cos A$$
$$= 4\cos^3 A - 3\cos A \qquad (11)$$

(1) + (4) ಮತ್ತು (1) − (4) ಇವುಗಳಿಂದ

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$+ \sin A \cos B - \cos A \sin B$$
$$= 2\sin A \cos B \qquad (12)$$

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B \qquad (13)$$

(2) + (5) ಮತ್ತು (2) − (5) ಇವುಗಳಿಂದ

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$
$$+ \cos A \cos B + \sin A \sin B$$
$$= 2\cos A \cos B \qquad (14)$$

$$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2\sin A \sin B \qquad (15)$$

$$\therefore \cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A \sin B \qquad (15)$$

(12) ರಿಂದ (15)ರ ವರೆಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ $A+B=C$, $A-B=D$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ

$A = \dfrac{C+D}{2}$, $B = \dfrac{C-D}{2}$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \qquad (16)$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \qquad (17)$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \qquad (18)$$

$$\cos C - \cos D = -2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{D-C}{2} \qquad (19)$$

Formulae (16) to (19) are called the sum and product formulae as they express the sum (or difference) of two trigonometric functions as products of trigonometric functions.

Exercises 9.1

1 Prove independently (from the figure) :

$\sin (A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$\cos (A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$$\tan (A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}$$

2 Prove the following identities :—

(i) $\sin 2A = \dfrac{2 \tan A}{1+\tan^2 A}$

(ii) $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

(iii) $\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1-\tan^2 A}$

(iv) $\tan 3A = \dfrac{3 \tan A - 3 \tan^3 A}{1-3 \tan^2 A}$

(v) $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \tan A$

(vi $\dfrac{\sin 2A}{1-\cos 2A} = \cot A$

$$\cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$
$$= 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2} \qquad (19)$$

(16) ರಿಂದ (19)ರವರೆಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳು ಎರಡು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ವನ್ನಾಗಿ ಬರೆಯುಬಹುದು ಎಂದು ಸೂಚಿಸುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ ಸೂತ್ರಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 9.1

1 ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಿರಿ (ಚಿತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ)—

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$
$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$
$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A\tan B}$$

2 ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ—

(i) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(ii) $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

(iii) $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

(iv) $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - 3\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

(v) $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \tan A$

(vi) $\dfrac{\sin 2A}{1-\cos 2A} = \cot A$

(vii) $\cot 2A = \dfrac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A}$

(viii) $\left(\sin \dfrac{A}{2} + \cos \dfrac{A}{2}\right)^2 = 1 + \sin A$

(ix) $\left(\sin \dfrac{A}{2} - \cos \dfrac{A}{2}\right)^2 = 1 - \sin A$

(x) $\cot 3A = \dfrac{\cot^3 A - 3 \cot A}{3 \cot^2 A - 1}$

(xi) $\dfrac{\cos^3 A - \cos 3A}{\cos A} + \dfrac{\sin^3 A + \sin 3A}{\sin A} = 3$

(xii) $\dfrac{\sin 3A}{\sin A} - \dfrac{\cos 3A}{\cos A} = 2$

(xiii) $\dfrac{\sin 3A + \sin^3 A}{\cos^3 A - \cos 3A} = \cot A$

3 Prove that

(i) $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

(ii) $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$

(iii) $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$

(iv) $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$

4 Prove that :—

(i) $2 \cos \dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

(ii) $2 \cos 11^\circ 15' = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

(iii) $\operatorname{cosec} 10^\circ - \sqrt{3} \sec 10^\circ = 4$

(vii) $\cot 2A = \dfrac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A}$

(viii) $\left(\sin \dfrac{A}{2} + \cos \dfrac{A}{2} \right)^2 = 1 + \sin A$

(ix) $\left(\sin \dfrac{A}{2} - \cos \dfrac{A}{2} \right)^2 = 1 - \sin A$

(x) $\cot 3A = \dfrac{\cot^3 A - 3 \cot A}{3 \cot^2 A - 1}$

(xi) $\dfrac{\cos^3 A - \cos 3A}{\cos A} + \dfrac{\sin^3 A + \sin 3A}{\sin A} = 3$

(xii) $\dfrac{\sin 3A}{\sin A} - \dfrac{\cos 3A}{\cos A} = 2$

(xiii) $\dfrac{\sin 3A + \sin^3 A}{\cos^3 A - \cos 3A} = \cot A$

3 సాధిచిరి—

(i) $\sin 15° = \cos 75° = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

(ii) $\sin 75° = \cos 15° = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$

(iii) $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$

(iv) $\tan 75° = 2 + \sqrt{3}$

4. సాధిచిరి—

(i) $2 \cos \dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

(ii) $2 \cos 11°15' = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

(iii) $\operatorname{cosec} 10^0 - \sqrt{3} \sec 10^0 = 4$

(iv) $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

(v) $\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

(vi) $\sin 18^\circ + \sin 30^\circ = \sin 54^\circ$

(vii) $\cos (30^\circ+A) \cos (30^\circ-A) - \sin (30^\circ+A) \sin (30^\circ-A) = \frac{1}{2}$

(viii) $\sin (60^\circ-A) \cos (30^\circ+A) + \cos (60^\circ-A) \sin (30^\circ+A)=1$

Hint for problem number 4 (v) :

Let $36^\circ=x$

$5x=180^\circ$

$3x=180^\circ-2x$

$\cos 3x=\cos (180^\circ-2x) = -\cos 2x$

$4 \cos^3 x-\cos x = -2 \cos^2 x + 1$

$\therefore 4y^3+2y^2-3y-1=0$ where $y=\cos x$

$(y+1)(4y^2-2y-1) = 0$

$y = -1$ or $\cos x = -1$ or $x = 180^\circ$

which is not the case.

$\therefore 4y^2 - 2y-1 = 0$

$y = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$

36° is an acute angle.

$\therefore \cos 36^\circ$ is positive.

$\therefore y = \cos x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ But $x = 36^\circ$

$\therefore \cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

(iv) $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

(v) $\cos 36^0 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

(vi) $\sin 18^0 + \sin 30^0 = \sin 54^\circ$

(vii) $\cos (30^0 + A) \cos (30^0 - A) - \sin (30^\circ + A) \sin (30^0 - A) = \frac{1}{2}$

(viii) $\sin (60^0 - A) \cos (30^0 + A) + \cos (60^0 - A) \sin(30^\circ + A) = 1$

ಅಭ್ಯಾಸ 4 (v) ಇದಕ್ಕೆ ಸೂಚನೆ—

$36^0 = x$ ಎಂದಿರಲಿ

$5x = 180^0$

$3x = 180^0 - 2x$

$\cos 3x = \cos (180^0 - 2x) = -\cos 2x$

$4 \cos^3 x - 3 \cos x = -2 \cos^2 x + 1$

$\therefore \quad 4y^3 + 2y^2 - 3y - 1 = 0$ ಇಲ್ಲಿ $y = \cos x$

$(y+1)(4y^2 - 2y - 1) = 0$

$y = -1$ ಅಥವಾ $\cos x = -1$, ಅಥವಾ $x = 180^0$. ಇದು ಇಲ್ಲಿ ಅಪ್ರಕೃತ.

$\therefore \quad 4y^2 - 2y - 1 = 0$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

36^0 ಯು ಲಘುಕೋನವಾಗಿದೆ.

$\therefore$ $\cos 36^0$ ಯು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ.

$\therefore \quad y = \cos x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

ಆದರೆ $x = 36^0$

$\therefore \quad \cos 36^0 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

(x) $\cot\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = \frac{\cot\theta+1}{\cot\theta-1}$

(x) $4(\cos^3 10^\circ + \sin^3 20^\circ) = 3(\cos 10^\circ + \sin 20^\circ)$

5 Prove that

(i) $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$
$= \cos^2 B - \cos^2 A$

(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$
$= \cos^2 B - \sin^2 A$

(iii) $\cos^6 A - \sin^6 A = \cos 2A\,(1-\sin^2 2A)$

(iv) $\tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan 3A \tan 2A \tan A$

(v) $\frac{1}{\tan 3A+1} - \frac{1}{\cot 3A+\cot A} = \cot 4A$

(vi) $(2\cos A+1)(2\cos A-1) = 2\cos 2A+1$

6 Prove the following identities by using the sum and product formulae—

(i) $\sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin(\alpha-\beta-\gamma) + \sin(\alpha+\beta-\gamma)$
$+ \sin(\alpha-\beta+\gamma) = 4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$LHS = 2\sin\alpha\cos(\beta+\gamma) + 2\sin\alpha\cos(\beta-\gamma)$
$= 2\sin\alpha[\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)]$
$= 2\sin\alpha\, 2\cos\beta\cos\gamma$
$= 4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma = RHS$

(ii) $\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) + \cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)$
$+ \cos(\gamma+\delta)\sin(\gamma-\delta) + \cos(\delta+\alpha)\sin(\delta-\alpha) = 0$

$LHS = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) + \frac{1}{2}(\sin 2\beta - \sin 2\gamma)$
$+ \frac{1}{2}(\sin 2\gamma - \sin 2\delta) + \frac{1}{2}(\sin 2\delta - \sin 2\alpha) = 0 = RHS$

(ix) $\cot\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = \frac{\cot\theta+1}{\cot\theta-1}$

(v) $4(\cos^3 10^\circ+\sin^3 20^\circ) = 3(\cos 10^\circ+\sin 20^\circ)$

5 ಸಾಧಿಸಿರಿ

(i) $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$
$=\cos^2 B-\cos^2 A$

(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B$
$=\cos^2 B-\sin^2 A$

(iii) $\cos^6 A-\sin^6 A=\cos 2A(1-\sin^2 2A)$

(iv) $\tan 3A-\tan 2A-\tan A=\tan 3A\tan 2A\tan A$

(v) $\frac{1}{\tan 3A+\tan A}-\frac{1}{\cot 3A+\cot A}=\cot 4A$

(vi) $(2\cos A+1)(2\cos A-1)=(2\cos 2A+1)$

6 ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ—

(i) $\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha-\beta-\gamma)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)$
$+\sin(\alpha-\beta+\gamma) = 4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$

ಎಡಭಾಗ $= 2\sin\alpha\cos(\beta+\gamma)+2\sin\alpha\cos(\beta-\gamma)$

$= 2\sin\alpha[\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)]$

$= 2\sin\alpha\, 2\cos\beta\cos\gamma$

$= 4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma =$ ಬಲಭಾಗ

(ii) $\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)$
$+\cos(\gamma+\delta)\sin(\gamma-\delta)+\cos(\delta+\alpha)$
$\sin(\delta-\alpha)=0$

ಎಡಭಾಗ $= \frac{1}{2}(\sin 2\alpha-\sin 2\beta)+\frac{1}{2}(\sin 2\beta-\sin 2\gamma)$
$+\frac{1}{2}(\sin 2\gamma-\sin 2\delta)+\frac{1}{2}(\sin 2\delta-\sin 2\alpha)$
$=0=$ ಬಲಭಾಗ

(iii) $\cos^2(\beta-\gamma)+\cos^2(\gamma-\alpha)+\cos^2(\alpha-\beta)$

$$= 1 + 2\cos(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma)\cos(\gamma-\alpha)$$

$$LHS = 1 - \sin^2(\beta-\gamma) + \cos^2(\gamma-\alpha) + \cos^2(\alpha-\beta)$$

$$= 1 + [\cos^2(\gamma-\alpha) - \sin^2(\beta-\gamma)] + \cos^2(\alpha-\beta)$$

$$= 1 + \cos(\beta-\alpha)\cos(2\gamma-\beta-\alpha) + \cos^2(\alpha-\beta)$$

$$= 1 + \cos(\alpha-\beta)[\cos(2\gamma-\beta-\alpha) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$= 1 + \cos(\alpha-\beta)\, 2\cos(\gamma-\beta)\cos(\gamma-\alpha)$$

$$= 1 + 2\cos(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma)\cos(\gamma-\alpha)$$

$$= RHS$$

(iv) If $A+B+C=180°$ prove that

$$\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$$

$$A + B + C = 180°.$$

$$A + B = 180° - C$$

$$\tan(A+B) = \tan(180° - C) = -\tan C$$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} = -\tan C$$

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$
Dividibg throughout by $\tan A\tan B\tan C$

$$\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$$

(v) If $A + B + C = \pi^c$ prove that

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} = 4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$$

$$LHS = 2\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4} + \cos\frac{\pi-(A+B)}{2}$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4} + \sin\frac{A-B}{2}$$

(iii) $\cos^2(\beta-\gamma)+\cos^2(\gamma-\alpha)+\cos^2(\alpha-\beta)$

$=1+2\cos(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma)\cos(\gamma-\alpha)$

ಎಡಭಾಗ $=1-\sin^2(\beta-\gamma)+\cos^2(\gamma-\alpha)+\cos^2(\alpha-\beta)$

$=1+\{\cos^2(\gamma-\alpha)-\sin^2(\beta-\gamma)\}+\cos^2(\alpha-\beta)$

$=1+\cos^2(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\alpha)\cos(2\gamma-\beta-\alpha)$

$=1+\cos(\alpha-\beta)\{\cos(\alpha-\beta)+\cos(2\gamma-\beta-\alpha)\}$

$=1+\cos(\alpha-\beta)\,2\cos(\gamma-\beta)\cos(\gamma-\alpha)$

$=1+2\cos(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma)\cos(\gamma-\alpha)$

$=$ಬಲಭಾಗ.

(iv) $A+B+C=180^\circ$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಸಾಧಿಸಿರಿ—

$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1.$

$$A+B+C=180^\circ$$

$$A+B=180^\circ-C$$

$$\tan(A+B)=\tan(180^\circ-C)=-\tan C$$

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$$

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$

$\tan A\tan B\tan C$ ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ

$$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$$

(v) $A+B+C=\pi^c$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಸಾಧಿಸಿರಿ—

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$$

ಎಡಭಾಗ $=2\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4}+\cos\frac{\pi-(A+B)}{2}$

$$=2\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4}+\sin\frac{A+B}{2}$$

$$=2\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4}+2\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{A+\ldots}{4}$$

$$=2\cos\frac{\pi-C}{4}\left[\cos\frac{A-B}{4}+\sin\frac{A+B}{4}\right]$$

$$=2\cos\frac{\pi-C}{4}\left[\cos\frac{A-B}{4}+\cos\frac{2\pi-(A+B)}{4}\right.$$

$$=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}=RHS$$

(vi) $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 60^\circ \tan 80^\circ=3$

$$LHS=\frac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}\cdot\sqrt{3}$$

$$=\sqrt{3}.\frac{(2\sin 20^\circ \sin 80^\circ)\sin 40^\circ}{(2\cos 20^\circ \cos 80^\circ)\cos 40^\circ}$$

$$=\sqrt{3}.\frac{(\cos 60^\circ-\cos 100^\circ)\sin 40^\circ}{(\cos 100^\circ+\cos 60^\circ)\cos 40^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}.\left[\frac{\sin 40^\circ}{2}+\cos 80^\circ \sin 40^\circ\right]}{-\cos 40^\circ \cos 80^\circ+\frac{\cos 40^\circ}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,[\sin 40^\circ+\sin 120^\circ-\sin 40^\circ]}{\cos 40^\circ-(\cos 120^\circ+\cos 40^\circ)}$$

$$=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}=3=RHS$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4} + 2\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{A+B}{4}$$

$$= 2\cos\frac{\pi-C}{4}\left[\cos\frac{A-B}{4} + \sin\frac{A+B}{4}\right]$$

$$= 2\cos\frac{\pi-C}{4}\left[\cos\frac{A-B}{4} + \cos\frac{2\pi-(A+B)}{4}\right]$$

$$= 2\cos\frac{\pi-C}{4} \cdot 2\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}$$

$$= 4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4} = \text{ಬಲಭಾಗ}$$

(vi) $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 60^\circ \tan 80^\circ = 3$

$$\text{ಎಡ ಭಾಗ} = \frac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ} \cdot \sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}.\ (2\sin 20^\circ \sin 80^\circ)\sin 40^\circ}{(2\cos 20^\circ \cos 80^\circ)\cos 40^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3}.\ (\cos 60^\circ - \cos 100^\circ)\sin 40^\circ}{(\cos 100^\circ + \cos 60^\circ)\cos 40^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,(\frac{1}{2} + \cos 80^\circ)\sin 40^\circ}{(-\cos 80^\circ + \frac{1}{2})\cos 40^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,[\sin 40^\circ + 2\sin 40^\circ \cos 80^\circ]}{\cos 40^\circ - 2\cos 40^\circ \cos 80^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,[\sin 40^\circ + \sin 120^\circ - \sin 40^\circ]}{\cos 40^\circ - (\cos 120^\circ + \cos 40^\circ)}$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3 = \text{ಬಲಭಾಗ}$$

7. Prove the following identities by using the sum and product fornulae.—

(i) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma)$

$$= 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}$$

(ii) $\sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha)$

$$= -4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

(iii) $\cos^2(\alpha-\beta) + \cos^2(\beta-\gamma) + \cos^2(\gamma-\alpha)$
$= 1 + 2\cos(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma)\cos(\gamma-\alpha)$

(iv) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) - \sin 4\beta}{\cos(\alpha+\beta) + \cos 4\beta} = \tan\dfrac{\alpha-3\beta}{2}$

(v) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) = -\sqrt{2}.\sin\alpha$

(vi) $\cos 12^\circ + \cos 60^\circ + \cos 84^\circ = \cos 24^\circ + \cos 48^\circ$

(vii) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \dfrac{1}{16}$

(viii) $\cos^2(45^\circ-\alpha) + \cos^2(15^\circ+\alpha) - \cos^2(15^\circ-\alpha) = \frac{1}{2}$

(ix) $\tan 6^\circ \tan 42^\circ \tan 66^\circ \tan 78^\circ = 1$

8. In the triangle ABC prove that—

(i) $\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4\cos A\cos B\sin C$

(ii) $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1 - 4\sin A\sin B\cos C$

(iii) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

(iv) $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2\sin A\sin B\cos C$

7 ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ—

(i) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$
$$=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}$$

(ii) $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)$
$$=-4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

(iii) $\cos^2(\alpha-\beta)+\cos^2(\beta-\gamma)+\cos^2(\gamma-\alpha)$
$$=1+2\cos(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma)\cos(\gamma-\alpha)$$

(iv) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin 4\beta}{\cos(\alpha+\beta)+\cos 4\beta}=\tan\left(\dfrac{\alpha-3\beta}{2}\right)$

(v) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=-\sqrt{2}.\sin\alpha$

(vi) $\cos 12^\circ+\cos 60^\circ+\cos 84^\circ=\cos 24^\circ+\cos 48^\circ$

(vii) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ=\dfrac{1}{16}$

(viii) $\cos^2(45^\circ-\alpha)+\cos^2(15^\circ+\alpha)-\cos^2(15^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}$

(ix) $\tan 6^\circ\tan 42^\circ\tan 66^\circ\tan 78^\circ=1$

8 ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿರಿ.—

(i) $\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C=4\cos A\cos B\sin C$

(ii) $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C=1-4\sin A\sin B\cos C$

(iii) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

(iv) $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=2\sin A\sin B\cos C$

(v) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}=1-2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(vi) $\sin(B+2C)+\sin(C+2A)+\sin(A+2B)$

$$=4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

(vii) $\dfrac{1+\cos A-\cos B+\cos C}{1+\cos A+\cos B-\cos C}=\tan\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}$

(viii) $\Sigma\dfrac{\tan A}{\tan B\tan C}=\Sigma\tan A-2\,\Sigma\cot A$

(v) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}=1-2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(vi) $\sin(B+2C)+\sin(C+2A)+\sin(A+2B)$

$$=4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

(vii) $\dfrac{1+\cos A-\cos B+\cos C}{1+\cos A+\cos B-\cos C}=\tan\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

(viii) $\sum\dfrac{\tan A}{\tan B\tan C}=\Sigma\tan A-2\Sigma\cot A$

CHAPTER 10

Simple Equations

10.1 To solve equations involving trigonometric functions certain working rules are now suggested.

Solve the equation—

(*a*) $\sin\theta + \sin 7\theta = \sin 4\theta$

$\therefore 2\sin 4\theta \cos 3\theta - \sin 4\theta = 0$

$\therefore \sin 4\theta\,[2\cos 3\theta - 1] = 0$

$\therefore \sin 4\theta = 0$	$2\cos 3\theta = 1$
$\theta = 0$	$\cos 3\theta = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$
Or $\theta = n\pi$	$\therefore 3\theta = 60^\circ$
	$\theta = 20^\circ$

(*b*) $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$

Divide throughout by

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Now } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ \cos\theta + \cos 60^\circ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(60^\circ + \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ$$

$$\therefore 60^\circ + \theta = 45^\circ$$

$$\theta = -15^\circ$$

ಅಧ್ಯಾಯ 10

ಸುಲಭ ಸಮೀಕರಣಗಳು

10.1 ಸುಲಭ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಕೆಲವು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ—

(*a*) $\sin\theta + \sin 7\theta = \sin 4\theta$

$\therefore \quad 2\sin 4\theta \cos 3\theta - \sin 4\theta = 0$

$\therefore \quad \sin 4\theta\,[2\cos 3\theta - 1] = 0$

$\therefore \sin 4\theta = 0$

$\theta = 0$

ಅಥವಾ $\theta = n\pi$

$2\cos 3\theta = 1$

$\cos 3\theta = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$

$\therefore 3\theta = 60^\circ$

$\therefore \theta = 20^\circ$

(b) $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$

$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$ ಇದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ.

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{\sin\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ಈಗ, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$$\therefore \sin 60^\circ \cos\theta + \cos 60^\circ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ$$

$$\therefore \sin(60^\circ + \theta) = \sin 45^\circ$$

$$60^\circ + \theta = 45^\circ$$

$$\theta = -15^\circ$$

(*c*) $2\cos^2 x + 3\sqrt{3}\sin x - 5 = 0$

$2(1-\sin^2 x) + 3\sqrt{3}\sin x - 5 = 0$

$2\sin^2 x - 3\sqrt{3}\sin x + 3 = 0$

$2\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x - \sqrt{3}\sin x + 3 = 0$

$2\sin x[\sin x - \sqrt{3}] - \sqrt{3}[\sin x - \sqrt{3}] = 0$

$(2\sin x - \sqrt{3})(\sin x - \sqrt{3}) = 0$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin x = \sqrt{3} > 1$
$x = 60°$	Therefore this solution is inadmissible as $\sin x \not> 1$

(*d*) $\tan\theta + \sec 2\theta = 1$

$\tan\theta + \frac{1}{\cos 2\theta} = 1$

$\tan\theta + \frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta} = 1$

$\tan\theta(1-\tan^2\theta) + (1+\tan^2\theta) - (1-\tan^2\theta) = 0$

$\therefore \quad \tan\theta - \tan^3\theta + 1 + \tan^2\theta - 1 + \tan^2\theta = 0$

$\tan^3\theta - 2\tan^2\theta - \tan\theta = 0$

$\tan\theta[\tan^2\theta - 2\tan\theta - 1] = 0$

$\tan\theta = 0$	$\tan^2\theta - 2\tan\theta - 1 = 0$
$\theta = 0$ or $n\pi$	$\tan\theta = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$
	$= 1 \pm \sqrt{2}$

Exercise 10·1

Solve the following equations—

1 $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$

2 $\sin 2\theta - \cos 2\theta - \sin\theta + \cos\theta = 0$

3 $\cos(3\theta+\alpha)\cos(3\theta-\alpha) + \cos(5\theta+\alpha)\cos(5\theta-\alpha) = \cos 2\alpha$

(c) $2 \cos^2 x + 3\sqrt{3} \sin x - 5 = 0$

$2(1 - \sin^2 x) + 3\sqrt{3} \sin x - 5 = 0$

$2 \sin^2 x - 3\sqrt{3} \sin x + 3 = 0$

$2 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x - \sqrt{3} \sin x + 3 = 0$

$2 \sin x (\sin x - \sqrt{3}) - \sqrt{3}(\sin x - \sqrt{3}) = 0$

$(2 \sin x - \sqrt{3})(\sin x - \sqrt{3}) = 0$

$\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $x = 60^\circ$	$\sin x = \sqrt{3} > 1$ $\sin x \not> 1$ ಆದುದರಿಂದ ಈ ಉತ್ತರ ಸಾಧುವಲ್ಲ.

(d) $\tan \theta + \sec 2\theta = 1$

$\tan \theta + \dfrac{1}{\cos 2\theta} = 1$

$\tan \theta + \dfrac{1 + \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta} = 1$

$\tan \theta (1 - \tan^2 \theta) + 1 + \tan^2 \theta - (1 - \tan^2 \theta) = 0$

$\therefore \tan^3 \theta - 2 \tan^2 \theta - \tan \theta = 0$

$\therefore \tan \theta (\tan^2 \theta - 2 \tan \theta - 1) = 0$

$\tan \theta = 0$ $\theta = 0$ ಅಥವಾ $\theta = n\pi$	$\tan^2 \theta - 2 \tan \theta - 1 = 0$ $\tan \theta = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$ $= 1 \pm \sqrt{2}$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.1

ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ—

1 $\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$

2 $\sin 2\theta - \cos 2\theta - \sin \theta + \cos \theta = 0$

3 $\cos(3\theta + a) \cos(3\theta - a) + \cos(5\theta + a) \cos(5\theta - a) = \cos 2a$

4 $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

5 $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}$

6 $\cos 2\theta = \cos^2\theta$

7 $2\sin\theta\tan\theta + 1 = \tan\theta + 2\sin\theta$

8 $5\tan\theta + 6\cot\theta = 11$

9 $\sec^2\theta + \tan^2\theta = 3\tan\theta$

10 $3\sin\theta = 4\cos^2\theta$

11 $6\sin^2\theta - 11\sin\theta + 4 = 0$

12 $3\sin^2\theta + 5\sin\theta = 2$

13 $\cos 3\theta - \cos 4\theta = \cos 5\theta - \cos 6\theta$

14 $\sqrt{3}\sec^2\theta = (\sqrt{3} + 1)\tan\theta + (\sqrt{3} - 1)$

10.2 Some Properties of Triangles

There is a definite relationship between the sides and angles of a triangle. Indeed, this is the basic concept behind Trigonometry.

Before we go to enunciate and prove some of the formulae let us acquaint ourselves with some of the standard symbols used in the succeeding arguments.

10.3 The six elements of the triangle ABC will be denoted as follows :—

$\angle BAC = A$, $\angle CBA = B$, $\angle ACB = C$

Side BC (Opp. to A) $= a$, $CA = b$. $AB = c$

Circumcentre of the $\triangle ABC - S$

Circumradius of the $\triangle ABC = R$

$\therefore SA = SB = SC = R$

Semiperimeter of the $\triangle ABC$,

$$\frac{a + b + c}{2} = s$$

Area of the $\triangle ABC = \triangle$

4 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$

5 $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$

6 $\cos 2\theta=\cos^2\theta$

7 $2\sin\theta\tan\theta+1=\tan\theta+2\sin\theta$

8 $5\tan\theta+6\cot\theta=11$

9 $\sec^2\theta+\tan^2\theta=3\tan\theta$

10 $3\sin\theta=4\cos^2\theta$

11 $6\sin^2\theta-11\sin\theta+4=0$

12 $3\sin^2\theta+5\sin\theta=2$

13 $\cos 3\theta-\cos 4\theta=\cos 5\theta-\cos 6\theta$

14 $\sqrt{3}\sec^2\theta=(\sqrt{3}+1)\tan\theta+\sqrt{3}-1$

10.2 ತ್ರಿಕೋಣಗಳ ಕೆಲವು ಗುಣಗಳು

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣದ ಭುಜಗಳಿಗೂ, ಕೋನಗಳಿಗೂ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಸಂಬಂಧ ವೊಂದಿದೆ. ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿ, ಇದೇ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿಯ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮೂಲ ಭಾವನೆ.

ಈ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಸಾಧಿಸುವ ಮೊದಲು ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ನಾವು ಪರಿಚಯಿಸಿಕೊಂಡು ಮುಂದುವರಿಯುವುದು ಉತ್ತಮ. ಮುಂದೆ ಬರುವ ವಿವರಣೆ ಯಲ್ಲಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

10.3 ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣದ ಆರು ಮೂಲಾಂಶಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕಾಣಿಸಿದಂತೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$\angle BAC=A,\ \angle CBA=B,\ \angle ACB=C$

ಭುಜ BC (A ಯ ಎದುರು) $= a$

$CA=b,\ AB=c$

ತ್ರಿಕೋಣದ ಪರಿಕೇಂದ್ರ— S

ತ್ರಿಕೋಣದ ಪರಿತ್ರಿಜ್ಯ $= R$

$\therefore\ SA=SB=SC=R$

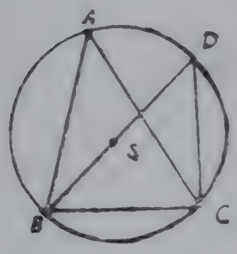
ತ್ರಿಕೋಣದ ಅರ್ಧಸುತ್ತಳತೆ $=\dfrac{a+b+c}{2}=s$

ತ್ರಿಕೋಣದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $=\triangle$

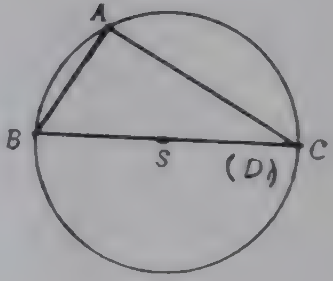
10.4 Sine Rule

In any $\triangle ABC$ show that

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



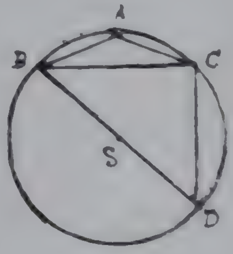
i



2

In fig. (1) $\angle A$ is acute,
in fig. (2) $\angle A$ is 90° and
in fig. (3) $\angle A$ is Obtuse.

Join BS and produce it to meet the circumference (2) in
Join CD



3

$\angle CDB = A$ in fig. (1)
$\angle CDB = 180° - A$ in fig. (3)

Further $BD = 2R$, $\angle BCD = 90°$

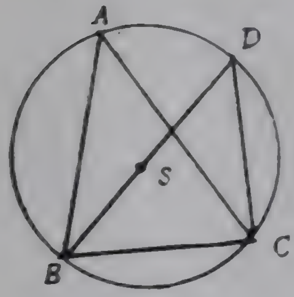
$\therefore$ In figures (1) and (3) from the $\triangle BCD$,

$\frac{BC}{BD} = \sin \angle BDC = \sin A \quad \therefore$ [sin $(180° - A) = \sin A$

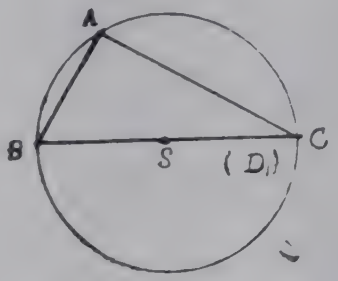
0.4 ಸೈನ್ ನಿಯಮ

ಯಾವುದಾದರೊಂದು ತ್ರಿಕೋಣ ABC ಯಲ್ಲಿ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



1



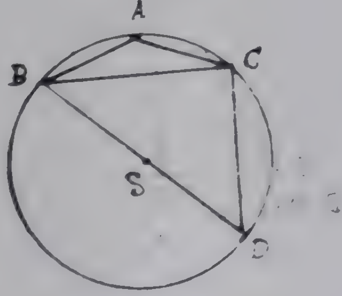
೨

ಒಂದನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle A$ ಲಘುಕೋನ

ಎರಡನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle A$ ಸಮಕೋನ

ಮೂರನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle A$ ಅಧಿಕ ಕೋನ

BSನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು D ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಅ ವೃದ್ಧಿಸಿ. CD ಯನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ.



೩

$\angle CDB = A$ (ಚಿತ್ರ 1)

$\angle CDB = 180° - A$ (ಚಿತ್ರ 3)

ಅಲ್ಲದೇ, $BD = 2R$, $\angle BCD = 90°$

∴ ಒಂದನೆಯ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋಣ ACD ಯಿಂದ,

$$\frac{BC}{BD} = \sin \angle BDC = \sin A \; [\because \sin(180° - A) = \sin A]$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = BD = 2R$$

In fig (2) $\frac{a}{\sin A} = \frac{BC}{\sin 90^\circ} = \frac{2R}{1}$

$$\therefore \text{In all the cases } \frac{a}{\sin A} = 2R$$

Similarly $\frac{b}{\sin B} = 2R$ and $\frac{c}{\sin C} = 2R$

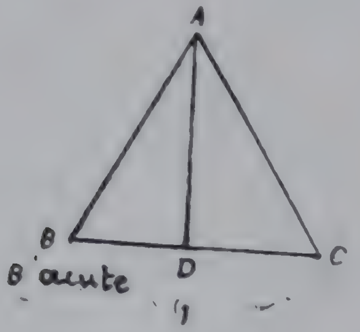
$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

To prove that

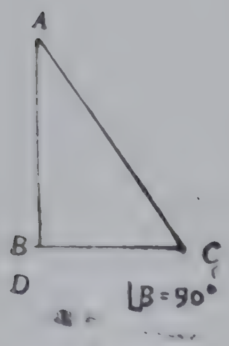
$$a = b \cos C + c \cos B$$
$$b = c \cos A + a \cos C$$
$$c = a \cos B + b \cos A$$

Draw AD perpendicular to BC

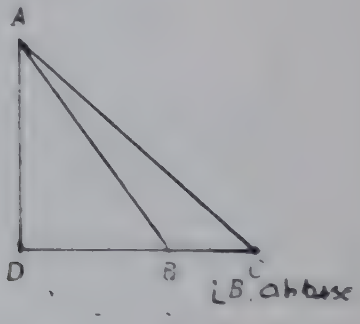
Fig (1) $a = BC = BD + DC$



1



2



3

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A} = BD = 2R$$

ಎರಡನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{BC}{\sin 90^\circ} = \dfrac{2R}{1}$

$\therefore$ ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$

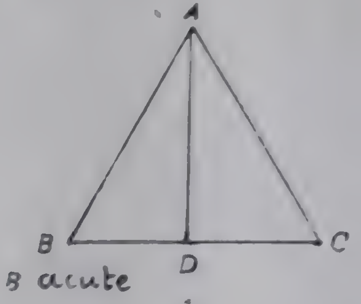
ಅದೇರೀತಿ $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$, ಮತ್ತು $\dfrac{c}{\sin C} = 2R$

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

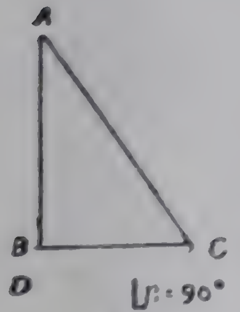
$a = b \cos C + c \cos B$
$b = b \cos A + a \cos C$
$c = a \cos B + b \cos A$, ಎಂದು ಸಾಧಿಸುವ ಕ್ರಮ.

ADಯನ್ನು BCಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಚಿತ್ರ (1) $a = BC = BD + DC$

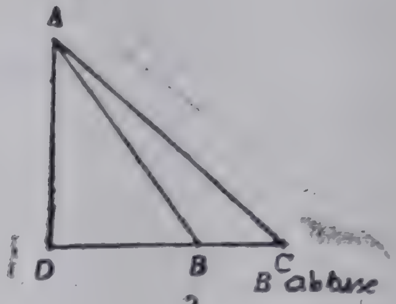


1



2

$\angle B = 90^\circ$



3

$\angle B$ ಅಧಿಕಕೋನ

$$= \frac{BD}{BA} BA + \frac{DC}{CA} CA$$

$$= c \cos B + b \cos C$$

Fig (2) $a = BC = \frac{BC}{CA} CA = b \cos C + c \cos 90°$

$$= c \cos B + b \cos C \qquad (\because \cos 90° = 0)$$

Fig (3) $a = BC = DC - DB = \frac{DC}{AC} AC - \frac{DB}{AB} AB$

$$= b \cos C - c \cos \angle ABD$$
$$= b \cos C - c \cos(180° - B)$$
$$= b \cos C + c \cos B$$

Thus in all the cases

$$a = b \cos C + c \cos B$$

Similarly the other two formulae can also be proved.

10.5 Cosine Rule

$$a = b \cos C + c \cos B \qquad (1)$$
$$b = c \cos A + a \cos C \qquad (2)$$
$$c = a \cos B + b \cos A \qquad (3)$$

Multiply (2) by b, (3) by c and (1) by a; add the first two and subtract the last.

$$b^2 + c^2 - a^2 = b[c \cos A + a \cos C] + c[a \cos B + b \cos A] - a[b \cos C + c \cos B]$$
$$= bc \cos A + ba \cos C + ca \cos B + cb \cos A - ab \cos C - a\,c \cos C$$
$$= 2\,bc \cos A$$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \qquad \therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$

Similarly,

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \qquad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2\,ca}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}$

These results together are called the cosine rule.

$$= \frac{BD}{BA} BA + \frac{DC}{CA} CA$$
$$= c \cos B + b \cos C$$

ಚಿತ್ರ (2) $a = BC = \frac{BC}{CA} CD = b \cos C + c \cos 90°$

$$= c \cos B + b \cos C \quad (\because \cos 90° = 0)$$

ಚಿತ್ರ (3) $a = BC = DC - DB = \frac{DC}{AC} AC - \frac{DB}{AB} AB$

$$= b \cos C - c \cos \angle ABD$$
$$= b \cos C - c \cos (180° - B)$$
$$= b \cos C + c \cos B$$

ಹೀಗೆ ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ

$$a = b \cos C + c \cos B$$

ಇದೇ ರೀತಿ ಉಳಿದೆರಡು ಸೂತ್ರಗಳನ್ನೂ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

10.5 ಕೊಸೈನ್ ನಿಯಮ

$$a = b \cos C + c \cos B \qquad (1)$$
$$b = c \cos A + a \cos C \qquad (2)$$
$$c = a \cos B + b \cos A \qquad (3)$$

(2) ನ್ನು b ಯಿಂದ, (3) ನ್ನು c ಯಿಂದ ಮತ್ತು (1)ನ್ನು a ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ; ಮೊದಲಿನೆರಡನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಕೊನೆಯದನ್ನು ಕಳೆಯರಿ.

$$b^2 + c^2 - a^2 = b [c \cos A + a \cos C] + c [a \cos B + b \cos A]$$
$$- a [b \cos c + c \cos B]$$
$$= bc \cos A + ba \cos C + ca \cos B + cb \cos A$$
$$- ab \cos C - ac \cos B = 2 bc \cos A$$

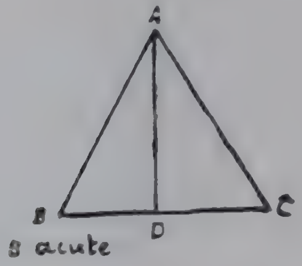
$$\therefore \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ,

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2 ca \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 ab \cos C$$

ಈ ಮೂರು ಫಲಿತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಒಟ್ಟಾಗಿ ಕೊಸೈನ್ ನಿಯಮವೆಂದು ಹೆಸರು.

An independent geometrical proof is given he below.

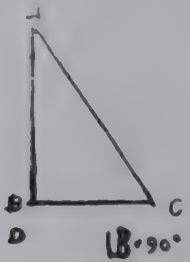


(1)

Fig. (1) $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$

$$\therefore b^2 = c^2 + a^2 - 2.a.\ \frac{BD}{BA}\ BA$$

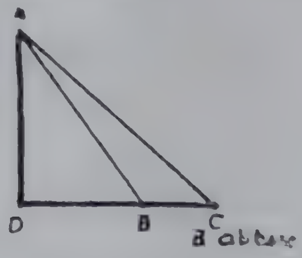
$$= c^2 + a^2 - 2ca.\cos B$$



(2)

Fig. (2) $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \quad (\because \cos B = \cos 90° = 0)$$

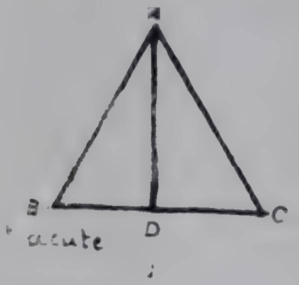


(3)

Fig. 10.4

Fig. 3) $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.DB$

ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಉಪಪತ್ತಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



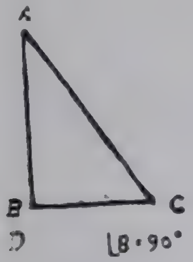
(1)

∠ B ಲಘುಕೋನ

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\ BC.\ BD$$

$$\therefore \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2a.\ \frac{BD}{BA}\ BA$$

$$= c^2 + a^2 - 2\ ac\ \cos B$$

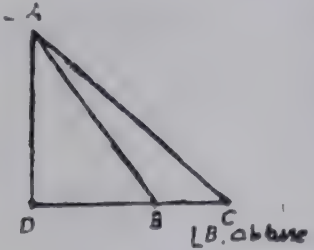


(2)

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\ ca\ \cos B$$

$$(\because \quad \cos B = \cos 90^\circ = 0)$$



(3)

ಚಿತ್ರ 10.4

∠ *B* ಅಧಿಕ ಕೋನ

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\ BC \cdot DB$$

$$b^2 = c^2 + a^2 + 2a \cdot \frac{DB}{BA} \cdot AB$$

$$= c^2 + a^2 + 2ac \cos \angle DBA$$

$$= c^2 + a^2 + 2ac \cos (180^\circ - B)$$

$$= c^2 + a^2 - 2ca \cos B.$$

Thus in all the cases.

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B$$

Similarly the remaining two formulae can be established.

Exercise 10.2

1 Prove that $\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$

Hence by making use of the sine rule or otherwise show that $abc = 4 R \Delta$

2 From the cosine rule by writing $\cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1$ and $1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2}$ separately obtain the following formulae

$a)$ $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

(b) $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-C)}{bc}}$

(c) $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

3 Prove the following results in a triangle ABC—

(a) $\sin \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a} \cos \frac{A}{2}$

(b) $\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}$

(c) $b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B = 2bc \sin A$

(d) $(b+c) \cos A + (c+a) \cos B +$
$(a+b) \cos C = a + b + c$

$$b^2 = c^2 + a^2 + 2\ a\ \frac{DB}{AB}\ AB$$
$$= c^2 + a^2 + 2\ ac\ \cos\ \angle DBA$$
$$= c^2 + a^2 + 2\ ac\ \cos\ (180° - B)$$
$$= c^2 + a^2 - 2\ ac\ \cos\ B$$

ಹೀಗೆ ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\ ca\ \cos\ B$$

ಇದೇ ರೀತಿ ಉಳಿದೆರಡು ಸೂತ್ರಗಳನ್ನೂ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 10.2

1 $\triangle = \frac{1}{2}\ bc\ \sin A = \frac{1}{2}\ ca\ \sin B = \frac{1}{2}\ ab\ \sin\ C$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಇದರಿಂದ, ಸೈನ್‌ನಿಯಮವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಅಥವಾ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ, $abc = 4R\triangle$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

2 ಕೊಸೈನ್ ನಿಯಮದಲ್ಲಿ $\cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2} - 1$, ಮತ್ತು $1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}$ ಎಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಬರೆದು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ—

(a) $\cos\ \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s\ (s-a)}{bc}}$,

(b) $\sin\ \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\ (s-c)}{bc}}$

(c) $\tan\ \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\ (s-c)}{s\ (s-a)}}$

3 ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣ ABC ಯಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ—

(a) $\sin\ \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a} \cos\ \frac{A}{2}$

(b) $\tan\ \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot\ \frac{A}{2}$

(c) $b^2 \sin\ 2C + c^2 \sin\ 2B = 2bc\ \sin\ A$

(d) $(b+c)\ \cos\ A + (c+a)\ \cos\ B + (a+b)\ \cos\ C = a+b+c$

(e) $\dfrac{a^2 \sin (B - C)}{\sin B + \sin C} + \dfrac{b^2 \sin (C - A)}{\sin C + \sin A}$

$$+ \frac{c^2 \sin (A - B)}{\sin A + \sin B} = 0$$

(f) $a^2+b^2+c^2=2\,(bc \cos A+ca \cos B+ab \cos C)$

(g) $a^3 \cos (B-C)+b^3 \cos (C-A)+c^3 \cos(A-B)=3\,abc$

(h) $(b-a) \cos C+c\,(\cos B-\cos A)$

$$= c \sin \frac{A-B}{2} \operatorname{cosec} \frac{A+B}{2}$$

(i) $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\tan \dfrac{A+B}{2}}{\tan \dfrac{A-B}{2}}$

4 Prove that in each of the following cases $\angle C=90$

(i) $\sin^2 \dfrac{B}{2} = \dfrac{c-a}{2c}$

(ii) $\dfrac{a-b}{a+b} = \tan \dfrac{A-B}{2}$

(iii) $\left(\sin \dfrac{A}{2} + \cos \dfrac{A}{2}\right)^2 = \dfrac{a+c}{c}$

(iv) $\tan \dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{b+c}$

5 Given $(a+b+c)\,(b+c-a) = 3bc$, find A

6 If $C=60°$ show that

$$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$$

(e) $\frac{a^2 \sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\frac{b^2 \sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\frac{c^2 \sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0$

(f) $a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)$

(g) $a^3\cos(B-C)+b^3\cos(C-A)+c^3\cos(A-B)=3abc$

(h) $(b-a)\cos C+c(\cos B-\cos A)$

$=c\sin\frac{A-B}{2}\ \operatorname{cosec}\frac{A+B}{2}$

(i) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$

4 ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ $\angle C=90^\circ$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ—

(i) $\sin^2\frac{B}{2}=\frac{c-a}{2c}$

(ii) $\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}$

(iii) $\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2=\frac{a+c}{c}$

(iv) $\tan\frac{A}{2}=\frac{a}{b+c}$

5 $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$ ಎಂದಿರುವಾಗ Aಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6 $C=60^\circ$ ಆದಾಗ

$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

7 If a, b, c are in $A.P.$ prove that $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ are also in $A.P.$

[a, b, c are in $A.P.$

$\therefore$ $(a+b+c-a)$, $(a+b+c-b)$, $(a+b+c-c)$ are in $A.P.$

$\therefore$ $b+c$, $c+a$, $a+b$ are in $A.P.$

$\sin B+\sin C$, $\sin C+\sin A$, $\sin A+\sin B$ are in $A.P.$

$$\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2},\quad \sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}$$

$$\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \text{ are in } A.P.$$

$$\cos\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right], \text{ ....et}$$

are in $A.P.$

Dividing throughout by $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ and omitting $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ from each

$$\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2} \text{ are in } A.P.$$

8 If a, b, c are in $A.P.$ prove that $\cos A\cot$ ·, $\cos B\cot\frac{B}{2}$, $\cos C\cot\frac{C}{2}$ are also in $A.P.$

9 If a, b, c are in $H.P.$ prove that $\sin^2\frac{A}{2}$, $\sin^2\frac{B}{2}$, $\sin^2\frac{C}{2}$ are also in $H.P$

7 a, b, c ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರುವಾಗ $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ ಸಹ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

[a, b, c ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

$\therefore\quad a+b+c-a,\quad a+b+c-b,\ a+b+c-c$ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

$\therefore\quad b+c,\ c+a,\ a+b$ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

$\therefore\quad \sin B+\sin C,\ \sin C+\sin A,\ \sin A+\sin B$ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

$\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2},\ \sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2},\ \sin\frac{A+B}{2}$

$\cos\frac{A-B}{2}$ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

$\cos\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right]$, ...

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ ಇದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅವರಣದಿಂದಲೂ $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ ನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ

$\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}$ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

8 a, b, c ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ $\cos A\cot\frac{A}{2}$, $\cos B\cot\frac{B}{2}$, $\cos C\cot\frac{C}{2}$ ಸಹ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

9 a, b, c ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ

$$\sin^2\frac{A}{2},\ \sin^2\frac{B}{2},\ \sin^2\frac{C}{2}$$

ಸಹ ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

10 Prove that

(a) $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{\Sigma a^2}{4\Delta}$

(b) $\Sigma\, a \sin (B - C) = 0$

(c) $(a^2 - b^2 + c^2) \tan B = (a^2 + b^2 - c^2) \tan C$

(d) $\Delta = \dfrac{a^2}{2 (\cot B + \cot C)}$

10.6 Solution of Triangles

We have already seen how a right-angled triangle can be solved under certain given conditions. We shall now proceed to explain how any triangle can be solved when any three of its elements (not all of which are angles) are given. In the succeeding discussion we confine ourselves to simple cases.

(a) Given three sides, to solve the triangle.

In simple numercial cases invloving small integers the cosine rule can be conveniently applied.

$a = 4$

Consider the case when $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$\therefore\ 16 = 25 + 36 - 2.30.\cos A$

$\therefore\ \cos A = \dfrac{45}{60} = \dfrac{3}{4} = 0.7500$

$\therefore\ A = 41^\circ\ 25'$ (natural cosines page)

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$

$25 = 36 + 16 - 2.24.\cos B$

$\cos B = \dfrac{27}{48} = \dfrac{9}{16} = 0.5625$

$\therefore\ B = 55^\circ\ 46'$

$\therefore\ C = 180^\circ - (A + B) = 82^\circ\ 49'$

10 ಸಾಧಿಸಿರಿ— .

(a) $\cot A+\cot B+\cot C = \frac{\Sigma a^2}{4\Delta}$

(b) $\Sigma\, a \sin (B-C) = 0$

(c) $(a^2-b^2+c^2) \tan B = (a^2+b^2-c^2) \tan C$

(d) $\Delta = \frac{a^2}{2(\cot B+\cot C)}$

10·6 ತ್ರಿಕೋಣಗಳ ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ

ಕೆಲವು ದತ್ತ ಸಂಗತಿಗಳಿರುವಾಗ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಅರಿತಿದ್ದೇವೆ. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣದ ಯಾವುದೇ ಮೂರು (ಅವೆಲ್ಲವೂ ಕೋನಗಳಾಗಿರಬಾರದು) ಮೂಲಾಂಶಗಳು ದತ್ತವಾದಾಗ ಆ ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗ ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮುಂದೆ ಬರುವ ವಿವರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸುಲಭ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಶೀಲಿಸಲಾಗುವುದು.

(a) ಮೂರು ಭುಜಗಳು ದತ್ತವಾದಾಗ ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು.

ಕಿರಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಸುಲಭ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಸೈನ್ ನಿಯಮವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಪ್ರಯೋಗಿಸಬಹುದು.

$a=4,\ b=5,\ c=6$ ಆಗಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$16=25+36-2\cdot30\cos A$$

$$\therefore\quad \cos A=\frac{45}{60}=\frac{3}{4}=0\cdot7500$$

$\therefore\quad A=41^\circ\ 25'$ (natural cosines ಪುಟ)

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

$$25=36+16-2\cdot24.\cos B$$

$$\cos B=\frac{27}{48}=\frac{9}{16}=0\cdot5625$$

$$\therefore\quad B=55^\circ\ 46'$$

$$\therefore\quad C=180^\circ-(A+B)=82^\circ\ 49'$$

(*b*) Given two sides and the included angle, to solve the triangle.

$$a=6,\ c=7,\ \angle B=60^\circ$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$=36+49-84\cos 60^\circ$$

$$=36+49-42=43$$

$$b=\sqrt{43}$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore \frac{6}{\sin A}=\frac{\sqrt{43}}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore \sin A=\frac{6.\sin 60^\circ}{\sqrt{43}}$$

$$\therefore \log\sin A=\log 6-\tfrac{1}{2}\log 43+\log\sin 60^\circ$$

$$=0.7782-\frac{1.6335}{2}+\bar{1}.9375$$

$$=\bar{1}.8989$$

$$\therefore A=52^\circ\ 24'$$

$$\therefore C=180^\circ-(B+A)$$

$$=67^\circ\ 36'$$

(*c*) Given one side and two angles, to solve the triangle

$$a=7,\quad B=40^\circ,\quad C=60^\circ.$$

$$A=180^\circ-(B+C)=80^\circ$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore \frac{7}{\sin 80^\circ}=\frac{b}{\sin 40}=\frac{c}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore b=\frac{7\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ}$$

(*b*) ಎರಡು ಭುಜಗಳೂ ಅವು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಕೋನವೂ ದತ್ತವಾದಾಗ ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು.

$a=6, \quad c=7, \quad \angle B=60^\circ$

$^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$=36+49-84\cos 60^\circ$

$=36+49-42=43$

$\therefore \quad b=\sqrt{43}$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore \quad \frac{6}{\sin A}=\frac{\sqrt{43}}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore \quad \sin A=\frac{6\sin 60^\circ}{\sqrt{43}}$$

$$\therefore \quad \log\sin A=\log 6-\tfrac{1}{2}\log 43+\log\sin 60^\circ$$

$$=0{\cdot}7782-\frac{1{\cdot}6355}{2}+\bar{1}.9375$$

$$=\bar{1}.8989$$

$\therefore \quad A=52^\circ\,24'$

$C=180^\circ-(B+A)=67^\circ 36'$

(*c*) ಒಂದು ಭುಜವೂ ಎರಡೂ ಕೋನಗಳೂ ದತ್ತವಾದಾಗ ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು.

$a=7,\ B=40^\circ;\ C=60^\circ$

$A=180^\circ-(B+C)=80^\circ$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore \quad \frac{7}{\sin 80^\circ}=\frac{b}{\sin 40^\circ}=\frac{c}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore \quad b=\frac{7\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ}$$

Hint for problem number 13

$$a=26,\ b=23 \quad A=40^\circ$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore \frac{26}{\sin 40^\circ} = \frac{23}{\sin B}$$

$$\therefore \sin B = \frac{23}{26} \sin 40^\circ$$

$$\log \sin B = \log 23 + \log \sin 40^\circ - \log 26 - 1.4150$$

$$-1.3617$$

$$+\bar{1}.8081$$

$$1.1698$$

$$1.4150$$

$$\bar{1}.7548$$

$$\therefore B=34^\circ\ 39' \text{ or } 180^\circ - 34^\circ\ 39' = 145^\circ\ 21'$$

since $\sin B = \sin(180^\circ - B)$

$\therefore B_1 = 34^\circ\ 39'$, $\quad B_2 = 145^\circ\ 21'$

$A = 40^\circ$, $\quad A = 40^\circ$

$\therefore C = 105^\circ\ 21'$ $\quad C =$ no admissible value.

$$\frac{26}{\sin 40^\circ} = \frac{c}{\sin 105^\circ\ 21'} = \frac{c}{\sin 74^\circ\ 39'}$$

$$\therefore \log c = \log 26 + \log \sin 74^\circ\ 39' - \log \sin 40^\circ$$

$$= 1.4150 \qquad -\bar{1}.8081$$

$$+\bar{1}.9842$$

$$1.3992$$

$$\bar{1}.8081$$

$$1.5\ 11$$

$$c=39$$

$a=26,\ b=23,\ A=40^\circ$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore \frac{26}{\sin 40^\circ}=\frac{23}{\sin B}$$

$$\therefore \sin B=\frac{23}{26}\sin 40^\circ$$

$\log \sin B=\log 23+\log \sin 40^\circ-\log 26-1.4150$

$$\begin{array}{r} =1.3617 \\ +\bar{1}.8081 \\ \hline 1.1698 \\ 1.4150 \\ \hline \bar{1}.7548 \end{array}$$

$\therefore\ B=34^\circ\ 39'$ ಅಥವಾ $180^\circ-34^\circ\ 39'=145^\circ\ 21'$

$\sin B=\sin(180^\circ-B)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$\therefore\ B_1=34^\circ\ 39',\qquad B_2=145^\circ\ 21'$

$A=40^\circ,\qquad A=40^\circ$

$\therefore\ C=105^\circ\ 21'\qquad C=$ ಹೊಂದುವ ಬೆಲೆ ಇಲ್ಲ

$$\frac{26}{\sin 40^\circ}=\frac{c}{\sin 105^\circ\ 21'}=\frac{c}{\sin 74^\circ\ 39'}$$

$\therefore\ \log c=\log 26+\log \sin 74^\circ\ 39'-\log \sin 40^\circ$

$$\begin{array}{r} =1.4150 \\ +\bar{1}.9842 \\ \hline 1.3992 \\ \bar{1}.8081 \\ \hline 1.5911 \end{array}\qquad -\bar{1}.8081$$

$c=39$

Hint for problem number 14

$$a=47, \quad c=13, \quad C=15^\circ$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{47}{\sin A} = \frac{13}{\sin 15^\circ} \quad \therefore \quad \sin A = \frac{47}{13} \sin 15^\circ$$

$$\therefore \quad \log \sin A = \log 47 + \log \sin 15^\circ - \log 13$$

$$= 1.6721 \qquad - 1.1139$$

$$+ \bar{1}.4130$$

$$1.0851$$

$$1.1139$$

$$\bar{1}.9712$$

$$\therefore \quad A = 69^\circ\ 22' \text{ or } 180^\circ - 69^\circ\ 22' = 110^\circ\ 38'$$

$$A_1 = 69^\circ\ 22' \qquad A_2 = 110^\circ\ 38'$$

$$C = 15^\circ\ 00' \qquad C = 15^\circ\ 00'$$

$$\therefore \quad B_1 = 95^\circ\ 38' \qquad \therefore \quad B_2 = 54^\circ\ 22'$$

$$\therefore \quad \frac{47}{\sin 69^\circ\ 22'} = \frac{b_1}{\sin 95^\circ\ 38'} = \frac{13}{\sin 15^\circ}$$

$$\therefore \ b_1 = \frac{13 \sin 95^\circ\ 38'}{\sin 15^\circ} = \frac{13}{\sin 15^\circ} \sin 84^\circ\ 22'$$

$$\log b_1 = \log 13 + \log \sin 84^\circ 22' - \log \sin 15^\circ$$

$$= 1.1139 \qquad - \bar{1}.4130$$

$$+ \bar{1}.9978$$

$$1.1117$$

$$\bar{1}\ \ .4130$$

$$1.6987$$

$$\therefore \ b_1 = 49.97$$

$a=47,\ C=13,\ C=15°$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{47}{\sin A}=\frac{13}{\sin 15°}\quad\therefore\quad \sin A=\frac{47}{13}\sin 15°$$

$$\therefore\quad \log\sin A=\log 47+\log\sin 15°-\log 13$$

$$\begin{array}{ll} = & 1.6721 \\ + & \bar{1}.4130 \quad\quad -1.1139 \\ \hline & 1.0851 \\ & 1.1139 \\ \hline & \bar{1}.9712 \end{array}$$

$\therefore\quad A=69°\ 22'$ ಅಥವಾ $180°-69°\ 22'=110°\ 38'$

$$\begin{array}{ll} A_1=69°\ 22' & A_2=110°\ 38' \\ C=15°\ 00' & C=15°\ 00' \\ \therefore\ B_1=95°\ 38' & \therefore\ B_2=54°\ 22' \end{array}$$

$$\therefore\quad \frac{47}{\sin 69°\ 22'}=\frac{b_1}{\sin 95°\ 38'}=\frac{13}{\sin 15°}$$

$$\therefore\quad b_1=\frac{13\sin 95°\ 38'}{\sin 15°}=\frac{13}{\sin 15°}\sin 84°\ 22'$$

$$\log b_1=\log 13+\log\sin 84°\ 22'-\log\sin 15°$$

$$\begin{array}{ll} =1.1139 & \\ +\bar{1}.9978 & \quad -\bar{1}.4130 \\ \hline 1.1117 & \\ \bar{1}.4130 & \\ \hline 1.6987 & \\ b_1=49.97 & \end{array}$$

$$\therefore \quad \frac{b_2}{\sin 54^\circ\ 22'} = \frac{13}{\sin 15^\circ}$$

$$\log b_2 = \log 13 + \log \sin 54^\circ\ 22' - \log \sin 15^\circ$$

$$= 1.1139 + \bar{1}.9100 - \bar{1}.4130$$

$$\begin{array}{r} 1.1139 \\ +\bar{1}.9100 \\ \hline 1.0239 \\ \bar{1}.4130 \\ \hline 1.6109 \end{array}$$

$$\therefore \quad b_2 = 61.09$$

The second worked out example is the "ambiguous case"

$$\therefore \quad \frac{b_2}{\sin 54^\circ \ 22'} = \frac{13}{\sin 15^\circ}$$

$$\log b_2 = \log 13 + \log \sin 54^\circ \ 22' - \log \sin 15^\circ$$

$$\begin{array}{ll} = 1.1139 & \\ + \bar{1}.9100 & - \bar{1}.4130 \\ \hline 1.0239 & \\ \bar{1}.4130 & \\ \hline 1.6109 & \end{array}$$

$$\therefore \quad b_2 = 61.09$$

ಎರಡನೆಯ ಅಭ್ಯಾಸವು ‚‚ಸಂದಿಗ್ಧ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ''ಗೆ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ.

ANSWERS

Exercises 4·1 Pages 50-51

1 $A \equiv (2, 5)$ $B \equiv (-4, -6)$ $C \equiv 4, -7)$ $D \equiv (-6, 4)$ $E \equiv (5, -2)$.

2 (*i*) II (*ii*) III (*iii*) I (*iv*) IV (*v*) IV (*vi*) III (*vii*) I (*viii*) II.

3 (*i*) y-axis (*ii*) x-axis (*iii*) Origin.

4 Origin and points on the axes do not belong to an quadrant.

Exercises 4·2 Pages 54-56

1 (*i*) $|x_1 - x_2|$ (*ii*) $|y_1 - y_2|$

2 (*i*) $\sqrt{8}$ (*ii*) 13 (*iii*) $2\sqrt{a^2+b^2}$

(*iv*) $a\ (t_1 - t_2)\sqrt{(t_1+t_2)^2+4}$ (*v*) $2a \sin \dfrac{\theta - \phi}{2}$.

3 $\dfrac{\sqrt{41}}{2}$.

12 $P \equiv (0, 4)$ or $P \equiv (8, 4)$.

13 $(2, 2)$ or $\left(\dfrac{-46}{17}, \dfrac{-14}{17}\right)$.

14 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

15 $(3, 2)$.

1 (*i*) (4, 3) (*ii*) $(\frac{1}{2}, 3)$ (*iii*) (6, −7) (*iv*) $\left(-1, \frac{-3}{2}\right)$
(*v*) (1, 1) (*vi*) (−2, −3).

2 (i) $\left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$ (ii) (0,6) (iii) $\left(\frac{-5}{4}, \frac{-7}{4}\right)$
(iv) $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$ (v) $\left(\frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}\right)$.

3 i) $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$, $\left(-\frac{5}{3}, 2\right)$
(ii) $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(2, \frac{4}{3}\right)$,
(iii) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

4 $\left(\frac{13}{2}, \frac{9}{2}\right)$, (7, 1), $\left(\frac{15}{2}, \frac{-5}{2}\right)$

5 (i) (1,2) (ii) (1, 1) (iii) (a, b).

6 Ratios are $\frac{2}{3}$: 1. $-\frac{1}{5}$: 1
Points are $\left(\frac{13}{5}, 0\right)$, $\left(-\frac{7}{4}, 0\right)$.

7 $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

8 5, $\sqrt{37}$, $\sqrt{52}$

9 (4,2)

10 $B \equiv (-7, 4)$

11 $P \equiv (2, -4)$, $Q \equiv (14, 26)$

12 $A \equiv (-3, 8)$, $B \equiv (12, -2)$

13 $C \equiv (10, 11)$

14 $A \equiv (-14, -10)$

Exercises 4.4. Page 66

1 (i) $x = \pm 4$ (ii) $y = \pm 4$

2 $x^2+y^2-10x-8y+32 = 0.$

3 $x = 0$

4 $3x^2 + 3y^2 - 20x - 22y + 47 = 0.$

Exercises 5.1 Pages 72—73

1 (i) $\frac{4}{3}$ (ii) -1 (iii) 1 (iv) $\frac{4}{3}$ (v) $\frac{9}{23}$

2 (i) $a=-1$, (ii) $a=-7$, (iii) $a=-5$

(Errata: Change $(0, a)$ to $(a, 0)$ in the pbm)

3 (i) 5 (ii) 4 (iii) x_1

4 Slopes of the sides: $-2, \frac{7}{2}, \frac{2}{5}$

Slopes of the medians: $-\frac{1}{2}, -14, \frac{10}{7}$

5 $\frac{25}{10^5}$

Exercises 5.2 Pages 76—77

3 (i) $\frac{-3}{5}, \frac{7}{2}$ (ii) $\frac{-1}{3}, 4$ (iii) $-21, \frac{13}{11}$

4 $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$

5 $L_1 \perp L_3$; $L_2 \perp L_4$

6 (a) $\left(3, \frac{2}{3}\right)$ (b) $(3, 4)$

Exercises 5.3 Page 79-80

1 If θ is the angle, then

(i) $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}+2}{1-2\sqrt{3}}$

(ii) $\tan\theta = 3$

(iii) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

2 If θ is the angle, then

(i) $\tan\theta = \dfrac{2}{11}$,

(ii) $\tan\theta = 3$

(iii) $\tan\theta = \dfrac{1}{3}$

(iv) $\tan\theta = \dfrac{2}{11}$

(v) $\tan\theta = \dfrac{35}{41}$

3 The tangents of the angles are

(i $\dfrac{28}{17}, \dfrac{7}{5}, \dfrac{7}{3}$

(ii) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}$

(iii) $a+2,\ -(a+2),\ \dfrac{2(a+2)}{a^2+4a+3}$

Excrcises 5.4 Pages 83-84

1 (i) $x+y+1=0$ (ii) $y=3$ (iii) $y=8$
(iv) $ax+by=ab$ (v) $x=3$.

2 (i) $4x-y-42=0$ (ii) $3x+4y-26=0$
(iii) $2x-3y+16=0$ (iv) $y=6$ (v) $x=3$.

3 $y=-2$, $x=1$.

4 $\sqrt{3}x-y+2-\sqrt{3}=0$.

5 (i) $x-y+1=0$ (ii) $x+y-3=0$, (iii) $y=2$

6 (i) $x+2y=15$; $y=2x$; $5x-2y+1=0$.
(ii) $x-8y+15=0$; $11x+2y-43=0$, $13x-14y-15=0$.
(iii) $x+2y+3=0$, $2x-y-12=0$, $2x-y=0$.

Exercises 5·5 Pages 90—91

1 (i) $y=5x-2$ (ii) $y=-4x+10$ (iii) $y=-6$
(iv) $y=-8x$ (v) $y=10x-5$ (vi) $y=0$.

2 (i) $3x+2y=6$ (ii) $x+y+1=0$ (iii) $4x-y+8=0$
(iv) $x+y=a$ (v) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$
(vi) $y=mx+1$.

3 (i) $x+y=\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{3}\,x+y=-6$ (iii) $x-y+4=0$
(iv) $x+\sqrt{3}\,y+12=0$ (v) $\sqrt{3}x-y-10=0$
(vi) $\sqrt{3}\,x+y+10=0$.

4 $y=x-3$

6 $x+2y=3$. (See Errata)

7 $2x-y+4=0$.

8 $x+5y=10$ (See Errata)

9 (i) $5x-4y=41$ (ii) $x-4y=17$ (iii) $x+y=8$.

Exercises 5.6 Pages 94—96

1 (i) $y = -\frac{5}{3}x + 2$; $-\frac{5}{3}$; 2, 6; $25y = 15x - 18$

(ii) $y = -3x + 2$; -3; 2, $\frac{2}{3}$; $9y = 3x - 2$.

(iii) $y = \frac{3}{5}x$; $\frac{3}{5}$; 0,0; $3y + 5x = 0$.

(iv) $y = -3x + 4$; -3; $\frac{4}{3}$, 4; $9y = 3x - 4$.

(v) $y = 12x - 6$; 12; -6, $\frac{1}{2}$; $2x + 24y = 1$.

(vi) $y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{-7}{2}$, -7; $y = 2x + 14$.

2 The line (i) is parallel to the line (iii) and the lin (ii) is parallel to the line (iv)

3 (i) $\frac{6}{\sqrt{34}}$, $\left(\frac{15}{17}, \frac{9}{17}\right)$ (ii) $\sqrt{\frac{2}{5}}$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{1}{5}\right)$

(iii) 0, (0, 0) (iv) $\sqrt{\frac{8}{5}}$, $\left(\frac{6}{5}, \frac{2}{5}\right)$

(v) $\frac{6}{\sqrt{145}}$, $\left(\frac{77}{145}, \frac{-6}{145}\right)$

(vi) $\frac{7}{\sqrt{5}}$, $\left(\frac{-7}{5}, \frac{-14}{5}\right)$.

5 (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $6\sqrt{3}$ (iii) 3.

7 (i) $ax + by + k = 0$ k is the parameter.

(ii) $bx - ay + k = 0$ k is the parameter.

(iii) $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ α is the parameter.

(iv) $y = m(x - a)$ m is the parameter.

(v) $y = x \tan \alpha + b$ b is the parameter.

(vi) $\frac{x}{k} + \frac{y}{a - k} = 1$ k is the parameter.

8 (i) $x + 2y = 9$ (ii) $4x - 3y + 8 = 0$.

9 $4x - 7y = 58$; $7x + 4y = 4$.

Exercises 5.7 Pages 99-100

1 (i) $\frac{3}{\sqrt{41}}$ (ii) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{112}{\sqrt{45}}$ iv) $2\sqrt{2}$ (v) $\frac{12}{\sqrt{26}}$

2 (i) $\frac{21}{2\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{11}{5\sqrt{17}}$ (iii) $\frac{5}{3\sqrt{145}}$

4 The points lie on different sides of the line.

7 $\left(\frac{18}{13}, \frac{25}{13}\right)$.

8 $\left(\frac{113}{13}, \frac{6}{13}\right)$.

Exercises 5·8 Pages 103

1 (i) $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{6}\right)$; $\tan\theta = 3$

(ii) $\left(\frac{40}{3}, \frac{-25}{3}\right)$; $\tan\theta = \frac{3}{13}$

(iii) $\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-1}, \frac{3}{\sqrt{3}-1}\right)$; $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

(iv) $(-1, -1)$; $\tan\theta = 3$

(v) $\left(0, \frac{-5}{4}\right)$; $\tan\theta = \frac{8}{31}$

4 $m = \frac{1}{7}$ or $m = -1$

5 $x - 7y + 17 = 0$; $\left(\frac{-22}{5}, \frac{9}{5}\right)$

6 $y = mx - 5$ where m satisfies $80m^2 + 216m + 143 = 0$.
(Two lines exist)

7 $\frac{\sqrt{194}}{4}$

Exercises 5.9 Page 106

1 (i) $13x - 5y - 7 = 0$; $13x - 11y + 21 = 0$
(ii) $3x - 3y - 65 = 0$; $x + y - 5 = 0$
(iii) $x - y - 1 = 0$; $(1 - \sqrt{3})x + (1 - \sqrt{3})y + 5 + \sqrt{3} =$
(iv) $x - y = 0$; $x + y + 2 = 0$.
(v) $4x - 6y - 5 = 0$; $4x + 4y + 5 = 0$.

2 (i) $x = y$
(ii) $x + y = 2$ (See Errata)

3 (i) $5x + 6y - 9 = 0$; $47x + 24y - 17 = 0$; $7x - 6y - 2 =$
(ii) $y = -1$; $24x + 3y + 16 = 0$; $24x - 22y - 9 = 0$.

Exercises 5.10 Page 108

1 (i) $(\sqrt{5} \pm 2\sqrt{2})x + (\sqrt{5} \mp \sqrt{2})y - 7\sqrt{5} = 0$.
(ii) $(5\sqrt{2} \pm \sqrt{89})x + (8\sqrt{2} \pm \sqrt{89})y \mp 5\sqrt{89} = 0$.
(iii) $(\sqrt{2} \pm 2)x + (-\sqrt{6} \pm 2)y + 2\sqrt{2} \mp 1 = 0$
(iv) $\sqrt{5} \pm \sqrt{8})x + (\pm 2\sqrt{8} - \sqrt{5})y \pm 3\sqrt{8} = 0$
(v) $(25 \pm 3\sqrt{41})x + (20 \pm 4\sqrt{41})y + 25 \pm 5\sqrt{41} =$

3 $7x - 7y - 3 = 0$; $x + y - 9 = 0$.

4 $x = 6$; $y = 2$. Radii are $(1 - \sqrt{3})$ and $(\frac{3}{2})$.

Exercises 5.12 Pages 112-113

1 (i) 9 sq. units (ii) 12 sq. units (iii) 10 sq. unit

2 (i) $\dfrac{289}{42}$ sq. units

(ii) $\dfrac{3}{4}$ sq. units.

(iii) $\frac{1}{2} \dfrac{a^3 (m_1 - m_2)(m_2 - m_3)(m_3 - m_1)}{m_1^2 m_2^2 m_3^2}$

Exercises 6·1 Page 120

1 (i) $x^2+y^2-2x-4y-4=0$; (ii) $x^2+y^2-2x=0$
(iii) $x^2+y^2+2x+16y+40=0$;
(iv) $2x^2+2y^2-6x+10y-15=0$.

2 (i) $(-4, -2)$, $\sqrt{19}$ (ii) $(0, 0)$, 5
(iii) $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

4 $2x^2+2y^2-62x-52y+117=0$.

5 $x-4y+7=0$.

6 $x^2+y^2-2x-8y-8=0$ or $x^2+y^2-2x+8y-8=0$.

7 $x^2+y^2-8x+14y+15=0$.

Exercises 6.2 Pages 125-126

1 (i) $x+y-2=0$. (ii) $8x-y=0$. (iii) $7x+y-6=0$.

2 (i) $x=\pm 4, y=\pm 4$.
(ii) $x-y-4=0$; $x+y+1=0$.
(iii) $x+2\sqrt{2}y-2=0$; $x-2\sqrt{2}y-2=0$;
$x-1=0$, $x+2=0$.

3 ( ) $3x-4y-5=0$; $3x-4y+5=0$.
(ii) $5x-y+2\sqrt{13}=0$; $5x-y-2\sqrt{13}=0$.
(iii) $y=0$; $y=2$.
(iv, $y=0$; $4y=3x$.

4 (ii) $K=\pm 4\sqrt{37}$. Points of contact are
(i) $\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$,. (ii) $\left(\frac{24}{\sqrt{37}}, \frac{4}{\sqrt{37}}\right)$
$\left(\frac{-24}{\sqrt{37}}, \frac{-4}{\sqrt{37}}\right)$

5 $3x-2y+26=0$; $3x-2y-26=0$.

6 (i) $2x+2y^2-4x-8y+9=0$

(ii) $4x^2+4y^2-20x-20y+25=0.$

(iii) $(x-k)^2+(y-k)^2=k^2$ where $k=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}(a+b-1)}$

Exercises 6.3 Page 128

1 Points are respectively inside, on and outside the given circle.

3 $\sqrt{7}$

4 (3, 4) and (−2, −1)

5 $x^2+y^2+2=0.$

Exercises 6.4 Page 130

2 $x^2+y^2-4x-6y+26=0$; $x^2+y^2-10x-12y+26=0.$

3 $x^2+y^2-2y-1=0$

4 $3x^2+3y^2+4x-28y=0$

Exercises 6.5 Pages 134-135

1 (i) $x-2y+6=0$ (ii) $20y-9=0$ (iii) $(a-b)\,x+(b-a)y=0.$

2 (i) (1, 1), (ii) (−2, −1), (iii) $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

Exercises 7.1 (Pages 147—148)

1 (a) $\frac{\pi}{12}$. (b) $\frac{\pi}{8}$. (c) $\frac{\pi}{4}$. (d) $\frac{5\pi}{12}$. (e) $\frac{13\pi}{24}$. (f) $\frac{5\pi}{6}$. (g) $\frac{7\pi}{6}$. (h) $\frac{5\pi}{3}$. (i) $\frac{13\pi}{6}$. (j) $\frac{7\pi}{3}$. (k) $\frac{59}{24}\pi$. (l) $\frac{85}{24}\pi$.

2 (a) 0.4506. (b) 0.6542. (c) 1.44. (d) 1.199. (e) 2.183 (f) 3.430.

3 (a) 135°. (b) 28°. (c) 33°20′. (d) 37°30′ (e) 36° (f) 77°8′34″ (g) 18°57′35″. (h) 255°.

4 5.236 ft., 52.36 sq.ft. 5 1.1416 radians, 65°24′10″

6 49.12 inches. 7 94.248 ft. 9 39.984 m.p.h. 10 $\frac{lr}{2}$.

Exercises 7.2 (Pages 152—153)

8 (i) $\frac{(x+y)^2}{a^2}+\frac{(x-y)^2}{b^2}=4.$ (ii) $x^2+y^2=a^2+b^2.$

(iii) $x^2-y^2+c^2=0.$

Exercises 7.3 (Pages 155—157)

(1) $\frac{618}{10023}$, (2) $\sin\theta=-\frac{32.8}{35}$, $\tan\theta=\frac{32.8}{12}$,

cosee $\theta=\frac{-35}{32.8}$, sce $\theta=\frac{-35}{12}$, $\cot\theta=\frac{12}{32.8}$ (3) —1.4

Exercises 7.4 (Pages 163—164)

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)
$\theta=$	120	150	210	225	240	270	300	315	330
$\theta=$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$
$\theta=$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\theta=$	$-\sqrt{3}$	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$
ce$\theta=$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	-2	$-\sqrt{2}$	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	-1	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	-2
$\theta=$	-2	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	-2	$-\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\theta=$	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	0	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	1	$-\sqrt{3}$

	(x)	(xi)	(xii)	(xiii)	(xiv)	(xv)	(xvi)	xvii	(xv…
$\theta=$	360	930	1380	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{2}$	$\frac{21\pi}{4}$	$\frac{13}{6}$…
$\sin\theta=$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	[illegible]
$\cos\theta=$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	[illegible]
$\tan\theta=$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	∞	-1	[illegible]
$\text{cosec}\,\theta=$	∞	-2	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{+2}{\sqrt{3}}$	-2	1	$\sqrt{2}$	2
$\sec\theta=$	1	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	2	$-\sqrt{2}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	∞	$-\sqrt{2}$	[illegible]
$\tan\theta=$	∞	$\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	0	-1	[illegible]

(2) (i) $\frac{1}{2}$, (ii) 2, (iii) 0, (iv) $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$, (v) $\frac{5-\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$, (vi) $\frac{2\sqrt{\ }}{3}$…

(3) $x=6$.

Exercieses 7·5 (Page 166)

1 (i) 0·8958, (ii) 0·7206, (iii) 0·6632, (iv) 0·6847
2 0·9406.
3 (i) 46° 21′, (ii) 46° 3′, (iii) 59° 41′, (iv) 50° 50′, (v) 33° 41′, (vi) 63° 35′.

Exercises 8.1 (Page 168)

(1) Triangle does not exist.
(2) $C=52°\ 57'$. $b=2.832$. $c=3.752$.
(3) $C=55°$. $a=2.1$. $b=3.662$.
(4) $A=45°\ 35'$. $B=44°\ 25'$. $b=2\sqrt{6}$.
(5) $A=24°\ 37'$. $C=65°\ 23'$. $c=\sqrt{119}$.

Exercises 8.2 (Pages 169—170)

(1) $20\sqrt{3}$ ft., 20 ft. (2) 150 ft. (ಕನ ಡ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಬುಡ, ಶಿಖರ, ಪದಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿ ಓದಬೇಕು.) (4) 70.9 ft., 70.9 ft. (5) $\frac{200\sqrt{3}}{3}$ ft. (6) 53.58 ft. (7) 1.36 mile or 6969.6 ft. (8) 0.8665 mile. (9) 92.26 ft. (10) $\frac{\sqrt{3}}{4}a$ where a is the distance between the feet of the posts). The position of the observer divides the line joining the feet of the posts in the ratio 1 : 3.

Exercises 8.3 (Pages 178—179)

1 (*a*) —cosec 45°. (*b*) —sec 45°. (*c*) tan 60° (*d*) cot 60°. (*e*) sin 60°, (*f*)—tan 90°, (*g*) $-\cot\frac{\pi}{6}$ (*h*) cosec $\frac{\pi}{6}$, (*i*) sec $\frac{\pi}{3}$, (*j*) cot $\frac{\pi}{2}$, (*k*) 1.

(3) —4. (7) $-\frac{1}{2}$.

Exercises 8.4 (Page 182)

2 (*a*) π, (*b*) $\frac{2\pi}{3}$, (*c*) $\frac{2\pi}{n}$, (*d*) $\frac{\pi}{2}$, (*e*) $\frac{\pi}{3}$, (*f*) $\frac{\pi}{n}$.

3 45° 34′, 314° 26′.

Exercises 10.1 (Pages 198—199)

(1) $\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$. (2) $2n\pi$, (3) $\frac{\pi}{16}$. (4) $\frac{\pi}{4}$ (5) $\frac{5\pi}{12}$ (6) $\frac{n\pi}{2}$, $n\pi$. (7) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$, (8) $\frac{\pi}{4}$, 50°12′ (9) $\frac{\pi}{4}$, 26°34° (10) 43°52° (11) $\frac{\pi}{6}$. (12) 19°28′ (13) $\frac{n\pi}{9}$, $n\pi$. (14) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$

Exercises 10.2 (Pages 204—207)

(5) $A=60^\circ$.

Exercises 10.3 (Pages 209)

(1) $c=7.4$, $A=51^\circ 6'$ $B=81^\circ 54'$.

(2) $c=2.12$. $A=41^\circ 50'$ $B=93^\circ 10'$.

(3) $b=9.23$. $B=87^\circ 14'$ $C=32^\circ 46'$

(4) $c=7.8$ $A=26^\circ 22'$. $B=33^\circ 38'$

(5) $A=48^\circ 12'$ $B=58^\circ 24'$. $C=73^\circ 24'$

(6) $A=28^\circ 57'$ $B=46^\circ 34'$ $C=104^\circ 29$

(7) $A=57^\circ 54'$ $B=75^\circ 32'$. $C=46^\circ 34'$

(8) $A=109^\circ 28'$ $B=38^\circ 48'$ $C=31^\circ 44'$

(9) $C=75^\circ$. $b=35.46$. $c=53.28$

(10) $A=40^\circ$. $a=30$, $b=45.96$

(11) $C=73^\circ$ $b=49.95$ $c=54.11$

(12) $A=70$. $a=31.23$ $b=31.78$

(13) $B=34^\circ 39'$ $C=105^\circ 21$ $c=39$

(14) $\triangle$le does nct exist.

(I5) (i) $B=15^\circ 36'$ $C=151^\circ 24'$ $c=76.61$
(ii) $B=164^\circ 24'$ $C=2^\circ 36'$ $c=7.26$

(16) $B=144^\circ 27'$ $C=16^\circ 33'$ $b=71.45$.

INDEX—ಅನುಬಂಧ

	Page
Abscissa ಕೋಟಿ	47
Algebraic sum ಬೈಜಿಕ ಮೊತ್ತ	184
Allied angles ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳು	170
Ambiguous case ಸಂದಿಗ್ಧ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ...	209
Analytic geometry ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ	46
Angle ಕೋನ	6, 139
—alternate ಪರ್ಯಾಯ	12
—complementary ಸಮಕೋನಪೂರಕ	8
—corresponding ಸಹಗಾಮಿ	12
—supplementary ಸರಳಕೋನಪೂರಕ	8
—between lines ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ	77
—generated by ಜನಿಸುವ	139
—right ಲಂಬ	139
—measurement of ಕೋನಮಾನ ...	141
Angular bisectors ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು	107
Appolonius' circle ಅಪೊಲೋನಿಯಸ್ ವೃತ್ತ	24
Area of a triangle ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ	111
Axioms ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು	3
Betweenness ಅಂತರತೆ	4
Broken line ತುಂಡಾದ ರೇಖೆ	184
Cartesian Coordinates ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು	47
Change of origin ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಪಲ್ಲಟ	67
Circle ವೃತ್ತ	114, 142
—circumference of ಪರಿಧಿ	143
—area of ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲ	144

—arc of ಕಂಸ 146
—section of ಖಂಡ 147
Coaxal circles ಏಕಾಕ್ಷ (ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ) ವೃತ್ತಗಳು 132
Collinearity ಏಕರೇಖಸ್ಥ, ಏಕ ರೇಖಾಗತ 108
Concurrence ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥ, ಏಕಬಿಂದುಸಂಪಾತ 108
Compound angles ಸಂಯುಕ್ತ ಕೋನಗಳು 185
Cosine rule ಕೊಸೆನ್ ನಿಯಮ 202
Degree ಡಿಗ್ರಿ 141
Directed distance ನಿರ್ದೇಶಿತ ದೂರ 47
Distance formula ದೂರದ ಸೂತ್ರ 51
Distance measurement ದೂರದ ಅಳತೆ 3
Distanee of a point from a line, ರೇಖೆಯೊಂದರಿಂದ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರ 96
Equation, of a locus, ಬಿಂದು ಪಥದ ಸಮೀಕರಣ 65
—of a line, ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ 80
—of point-slope form, ಬಿಂದು ಓಟ ರೂಪ 81
—of two-point form, ಎರಡು ಬಿಂದು ರೂಪ 81
—parametric form, ಚರಾಂಕ (ಪ್ರಾಚಲ) ರೂಪ 81
—standard form, ಸುಲಭ ರೂಪ 84
—slope-intercept form, ಓಟ-ವಿಚ್ಛಿನ್ನ ರೂಪ 85
—intercept form, ವಿಚ್ಛಿನ್ನತಾ ರೂಪ (ರೇಖಾಂತರ ರೂಪ) 85
—normal form, ಲಂಬ ರೂಪ 86
Equation of the circle, ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ 114
—standard form, ಸುಲಭರೂಪ 114
—general form, (ಸಾಮಾನ್ಯ) ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೂಪ 115
Equation of the tangent, ಸ್ಪರ್ಶಕದ (ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯ) ಸಮೀಕರಣ 120
Expression, ಉತ್ಪನ್ನ 155
Function, ಉತ್ಪನ್ನ ....

General equation of the first degree, ಏಕ ಪ್ರಮಾಣದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಮೀಕರಣ 91
Graphs, ಗ್ರಾಫುಗಳು 180, 181
Heights and distances, ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರ 168
Identity, ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ 151
Inclination, ಇಳಿವು (ಬಾಗು) 69
Intersection, ಛೇದನ 100
Length of the tangent, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದ 127
Line, ರೇಖೆ 1
—segment, ರೇಖಾಖಂಡ, ರೇಖಾಭಾಗ 1
Locus, ಬಿಂದುಪಥ 65
Mean proportional, ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿ 17, 37
Meridian, ಮಧ್ಯಾಹ್ನ ರೇಖೆ 148
Negative direction, ಋಣದಿಶೆ ....
Ordered pair ಕ್ರಮಾನುಗತ ಜೊತೆಗಳು 49
Ordinate ಭುಜ (y—ನಿರ್ದೇಶಕ) 47
Orthogonal projection ಲಂಬವಿಕ್ಷೇಪ 128
Orthogonal circles ಲಂಬವೃತ್ತಗಳು 128
Parallel lines ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು 11
Pendulum ಲೋಲಕ 148
Periodicity ಅವಧಿನಿಯಮ ... 179
Planes ಸಮತಲಗಳು 5
Point ಬಿಂದು 1
Polygon ಬಹುಭುಜ 10
Properties of triangles ತ್ರಿಕೋಣದ ಗುಣಗಳು 199
Postulates ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆಗಳು 3
Proportion ಅನುಪಾತ 15
—Continued ಸರಾನುಪಾತ 17
Quadrant ಪಾದ 48

Radical axis ಮೂಲಾಕ್ಷ 133
Radical centre ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರ ... 133
Ratio ಪ್ರಮಾಣ 15
Radian ರೇಡಿಯನ್ 142, 145
Ray ಕಿರಣ 1
Rectangular coordinates ಲಂಬನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ....
Right angled triangle ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣ ... 167
Related angles ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳು ... 170
Section formula ವಿಭಜನಾಸೂತ್ರ 58
Straight line ಸರಳರೇಖೆ 69
Slope ಓಟ 69
Sexagesimal system ಷಷ್ಟ್ಯಂಶ ಪದ್ಧತಿ 142
Sum and product formulae ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ ಸೂತ್ರಗಳು 189
Simple equations ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು 197
Sine rule ಸೈನ್‌ನಿಯಮ 200
Solution of triangles ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ ... 207
Space ಆಕಾಶ ... 11
Triangles ತ್ರಿಭುಜಗಳು, ತ್ರಿಕೋಣಗಳು 9
—similar ಸಮರೂಪ 27
Trigonometry ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ 138
Trigonometric ratios ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು 148
—Signs of ಚಿಹ್ನೆಗಳು 153
—of some well-known angles ಕೆಲವು ಸುಪರಿಚಿತ ಕೋನಗಳು 157
Tables ಟೇಬಲ್‌ಗಳು (ಕೋಷ್ಟಕಗಳು) 169
Vertex ಶೃಂಗ 9

ERRATA

Page	*Line*	*For*	*Read*
57 Eng. and Kan.	7	$y'-y_1=DF$ $y'-y_2=EF$	$y'-y_1=\overrightarrow{DF}$ $y'-y_2=\overrightarrow{EF}$
57 Eng.	12	$r=\dfrac{x'-x'}{x_2-x'}$	$r=\dfrac{x'-x_1}{x_2-x_1}$
57 Eng.	13	$r=\dfrac{y'-y'}{y_2-y'}$	$r=\dfrac{y'-y_1}{y_2-y_1}$
57 Eng.	14	$x'=\dfrac{x_1r+x}{1+r}$	$x^1=\dfrac{x_1+rx_2}{1+r}$
73 Eng. and Kan.	Pbm. 2 (iii)	(a, o)	(o, a)
91 Eng. and Kan.	Pbm. 6	is half its	is twice its
91 Eng. and Kan.	Pbm. 8	(1, 1)	(5, 1)
106 Eng. and Kan.	Pbm. 2 (ii)	k	4

WD P4512—GPB—10,000—16-9-196

For all publications of

THE BANGALORE UNIVERSITY

Contact

BANGALORE UNIVERSITY
CONSUMERS' COOPERATIVE SOCIETY LTD,
PALACE ROAD, BANGALORE 9